ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ και MODULES

2023

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> <u>ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

Φυλλάδιο 10°

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 1η Αν M είναι R-module

και $\varphi : M \to M$ ένας R-ενδομορφισμός του M, μπορούμε να ορίσουμε

$R[X] \times M \longrightarrow M$ ως εξής:

$$\left(X \cdot m = \varphi(m),\ X^2 \cdot m = \varphi^2(m) = \varphi(\varphi(m)) \ldots \right.$$

$$\left. f(X) \cdot m := f(\varphi)(m) \right)$$

Να αποδείξετε ότι το M γίνεται $R[X]$-module

<u>Απόδειξη</u>

(i) $f(X) \cdot (m_1 + m_2) = f(\varphi)(m_1 + m_2)$

$= f(\varphi)(m_1) + f(\varphi)(m_2) =$

$= f(X) \cdot (m_1) + f(X) \cdot (m_2)$

Ανάλογα και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

ΑΣΚΗΣΗ 2η Αν $R=\mathbb{Z}_6$ και $M=\mathbb{Z}_6$ ποιά είναι τα στοιχεία στρέψεως (torsion points) του $\mathbb{Z}_6$-module $\mathbb{Z}_6$;

Απάντηση $\mathbb{Z}_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$

Το $\bar{0}$ είναι, αφού $\bar{a}\cdot\bar{0}=\bar{0}$ $\forall \bar{a}\neq\bar{0}$

Τα $\bar{2}$ και $\bar{3}$ είναι αφού $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$

Το $\bar{4}$ είναι, αφού $\bar{4}\cdot\bar{3}=\bar{0}$

Τα $\bar{1}$ και $\bar{5}$ δεν είναι

Επομένως, $M_{tor}=(\mathbb{Z}_6)_{tor}=\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $(\mathbb{Z}_6)_{tor}$ δεν έχει δομή

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Ένα R-module M λέγεται R-module στρέψεως (torsion module) όταν όλα τα στοιχεία του είναι στοιχεία στρέψεως

Να αποδείξετε ότι, αν M torsion module, τότε και κάθε υπομodule του M είναι επίσης torsion module και ότι κάθε module πηλίκο του M, έστω M/N είναι επίσης torsion module

Απ Το πρώτο είναι φανερό.
Για το δεύτερο, επίσης πολύ απλά:

Έστω $m+N \in M/N$, το $m \in M$ και το

M είναι torsion free $\Rightarrow \exists\, r \in R, r \neq 0$ τ.ω

$r \cdot m = 0$. Επομένως $r(m+N) = r \cdot m + N = 0 + N = N$

$\Rightarrow M/N$ R-module στρέψεως

ΑΣΚΗΣΗ 4η.

Ένα R-module M λέγεται ελεύθερο στρέψεως όταν το μοναδικό σημείο στρέψεως είναι το ουδέτερο στοιχείο του M.

Να αποδείξετε ότι τα υποmodules ενός ελεύθερου στρέψεως R-module, είναι και αυτά ελεύθερα στρέψεως. Ισχύει το ίδιο για τα module πηλίκα;

Αποδ Το πρώτο είναι άμεσο. Αν υπήρχε ένα, μη-μηδ., σημείο στρέψεως στο υποmodule N, αυτό ως στοιχείο του M δεν θα ήταν σημείο στρέψεως, άτοπο.

Το δεύτερο, δεν ισχύει πάντοτε.

Αντιπαράδειγμα

Το $R=\mathbb{Z}$-module $M=\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερο στρέψεως, αφού $\mathbb{Z}$ ακεραία περιοχή.

Το $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_6$ δεν είναι ελεύθερο στρέψεως, όπως έχουμε δε σε προηγούμενη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Να αποδείξετε ότι το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι <u>ελεύθερο</u> στρέψεως ως $\mathbb{Z}$-module, αλλά <u>δεν</u> είναι <u>ελεύθερο</u> ως $\mathbb{Z}$-module.

<u>Απ</u> Το πρώτο μέρος είναι φανερό, αφού, αν $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ με $m \cdot r = 0$, τότε $r = 0$.

Για το δεύτερο, Αν $X \subseteq \mathbb{Q}$ είναι οποιοδήποτε σύνολο, υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με περισσότερα από δύο στοιχεία, τότε το X είναι $\mathbb{Z}$-γραμμικά εξαρτημένο

Πράγματι αν $\alpha, b \in X$, $\alpha = \frac{p}{q}$ και $b = \frac{r}{s}$ με $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, τότε, υπάρχουν ακέραιοι, οι $m := qr \in \mathbb{Z}$ και το $n = ps \in \mathbb{Z}$ τ.ω.

$$m \cdot \alpha - n \cdot b = qr \cdot \frac{p}{q} - ps \cdot \frac{r}{s} =$$

$$= r \cdot p - pr = 0$$

Αλλά και αν $X = \{\alpha = \frac{p}{q}\}$, με 1-στοιχείο

το X δεν παράγει όλο το $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-module

π.χ το $\frac{1}{2q}$ <u>δεν</u> μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{1}{2q} = m \cdot \alpha = m\frac{p}{q}$ $(m \in \mathbb{Z})$

αφού τότε $2mp = 1$, άτοπο