Δακτύλιοι και modules 2023

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (R όπως πάντα μεταθ. με $1 \in R$)

Φυλλάδιο 9°

Άσκηση 1η Ένα R-module M, είναι ελεύθερο, τάξης (διάστασης) n $\iff M \cong R^n$

Απ Αν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια R-βάση του M τότε:

M ελεύθερο $\iff$ η απεικόνιση

$$\varphi : R^n \longrightarrow M$$
$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

είναι ισομορφισμός από R-modules

Άσκηση 2η Ένα R-module M είναι πεπερ. παραγόμενο

$\iff$ όταν το M είναι ισόμορφο προς κάποιο πηλίκο του R-module, $\underbrace{R \oplus R \oplus \dots \oplus R}_{n-\pi\lambda\eta\theta o}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη "$\Rightarrow$" Έστω M πεπερ. παραγ.

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$

τ.ω. $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_R = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : R^n \longrightarrow M$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

Η φ είναι <u>επιμορφισμός</u> από R-moduls.

Από το 1° Θεώρημα ισομορφίας έχουμε

$$R^n / \ker\varphi \cong M.$$

"$\Leftarrow$" Αντίστροφα
Εξ υποθέσεως του M είναι "ομομορφική" εικόνα ενός R-ομομορ.

$$\varphi : R^n \twoheadrightarrow M$$

$$\Rightarrow R^n / \ker\varphi \cong M.$$

Για <u>κάθε</u> i, έχουμε

$$e_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \in R^n$$

i-στη θέση

Έστω $x_i = \varphi(e_i)$, για κάθε $i = 1, 2, \dots n$

Αν $m \in M$, $\exists x \in R^n$ τ.ω. $\varphi(x) = m$
(αφού φ επιμορφ.)

Το $x \in R^n \Rightarrow \exists\, a_i \in R$ $i = 1, 2, \dots, n$

τ.ω. $x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ οπότε

$$m = \varphi(x) = a_1 \varphi(e_1) + a_2 \varphi(e_2) + \dots + a_n \varphi(e_n)$$
$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \Rightarrow$$

Τα x_i παράγουν το M

$$\Longrightarrow M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \quad //$$

Άσκηση 3η Αν N είναι υπο-module του R-module M και τα N και M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενα R-module, τότε να αποδείξετε ότι και το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο

Απ. Το M/N είναι πεπερ. παραγ.

Άρα υπάρχουν $m_1+N, m_2+N, \ldots, m_s+N$ με $m_i \in M$ $(i=1,2,\ldots s)$ τ.ω

κάθε $m+N \in M/N$, γράφεται ως:

$$m+N = r_1(m_1+N) + r_2(m_2+N) + \cdots + r_s(m_s+N)$$

$$\Leftrightarrow m+N = (r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_s m_s) + N$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \sum_{i=1}^{s} r_i m_i\right) \in N$$

Αλλά και το N είναι πεπερ. παραγ.

Συνεπώς, $\exists\, n_1, n_2, \ldots, n_t \in N$ και $s_1, s_2, \ldots, s_t \in R$ τ.ω.

$$m - \sum_{i=1}^{s} r_i m_i = \sum_{j=1}^{t} s_j n_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Κάθε})\ m = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i + \sum_{j=1}^{t} s_j n_j$$

δηλαδή το M πεπερ παραγόμενο.

Άσκηση 4η Αν M είναι ένα R-module και $A \trianglelefteq R$ ορίζουμε το

$$A \cdot M = \{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ m_i \in M\}$$

Να αποδείξετε ότι το $A \cdot M$ είναι R-module, υποmodule του M.

Απ: Απλή επαλήθευση των αξιωμάτων ιδιοτήτων του ορισμού

Άσκηση 5η Αν M_1, M_2 υποmodules του R-module M, ορίζουμε

$$(M_1 : M_2) := \{r \in R \mid r M_2 \leq M_1\}$$

Να αποδείξετε ότι $(M_1 : M_2)$ είναι ιδεώδες του R

Απ: Απλή επαλήθευση των ιδιοτήτων του ιδεώδους

Σημείωση Ιδιαίτερα το

$$(\langle 0 \rangle : M) := \{r \in R \mid rM = 0\}$$

λέγεται μηδενιστής του R-module M και συμβολίζεται $Ann(M)$

<u>Άσκηση 6</u>: Αν $A \trianglelefteq R$ και M R-module τ.ω. $A \subseteq Ann(M)$, να αποδείξετε ότι το M μπορεί να θεωρηθεί και ως R/A-module

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\bar{x} := x + A \in R/A$ ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} R/A \times M & \longrightarrow & M \\ (\bar{x}, m) & \longmapsto & x \cdot m \end{array} \right\}$$

Η φ είναι <u>καλά</u> <u>ορισμένη</u>

Πράγματι, αν $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x + A = y + A$

$\Rightarrow x - y \in A \subseteq Ann(M) \Rightarrow (x-y)M = 0$

$\Rightarrow (x-y)(m) = 0, \ \forall m \in M$

$\Rightarrow x \cdot m = y m, \ \forall m \in M.$

Οι υπόλοιπες ιδιότητες είναι απλή επαλήθευση.

Ορισμός Ένα R-module M, λέγεται **πιστό** όταν $Ann(M)=\{0\}$

Άσκηση 7η Αν $Ann(M)=: A$ τότε να αποδείξετε ότι το M είναι **πιστό** R/A - module

Απ $Ann(R/A)=\{r+A \mid r\in R \text{ τ.ω. } (r+A)M=0\}$

$=\{r+A \mid r\in R \text{ τ.ω. } rM+A\cdot M=0\}$

Αλλά $A=Ann(M) \Rightarrow A\cdot M=0$

Επομένως, $Ann(R/A)=\{r+A \mid r\in R : r\cdot M=0\}$

$=\{r+A \mid r\in R,\ r\in A=Ann(M)\}=A$

το οποίο είναι το **μηδενικό** **στοιχείο** του δακτυλίου $R/A \Rightarrow$

Το M είναι **πιστό** R/A - module.