Χειμερινό εξάμηνο 2022-23 - Άλγεβρα Ι

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Γράψτε τον τύπο τής Ευκλείδειας διαίρεσης τού a δια τού b στις παρακάτω περιπτώσεις:
   (α') $a = -327$, $b = 12$.
   (β') $a = 453$, $b = -8$.
   (γ') $a = -372$, $b = -11$.

2. (α') Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(1147, 851)$.
   (β') Γράψτε τον d στην μορφή $d = 1147\,\kappa + 851\,\lambda$ γιά κάποιους ακέραιους κ, λ.

3. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(144, 625)$ με χρήση
   (α') τής Ευκλείδειας διαίρεσης
   (β') τής ανάλυσης των 144 και 625 σε πρώτους αριθμούς.

4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(5n + 1, 21n + 4) = 1$.

5. Να βρεθούν φυσικοί αριθμοί m, n τέτοιοι ώστε $m + n = 432$ και μκδ$(m, n) = 36$.

6. (α') Αν μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ab, c) =$ μ.κ.δ.(a, c).
   (β') Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό n ισχύει ότι μκδ$(n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1) = 1$ ή 5.

7. Εστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
   (α') Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) =$ μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$.
   (β') Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = d$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = d$.

8. Εστω $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$.
   (α') Αν $k \neq 0$, δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ka, kb) = |k|$ μ.κ.δ.(a, b).
   (β') Αν μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = 1$.

9. Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι $(ab, c) = 1$ αν και μόνον αν $(a, c) = 1$ και $(b, c) = 1$.

10. Έστω p πρώτος αριθμός. Αν $p \mid a^n$, $a \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι $p^n \mid a^n$.

11. Αν ο ακέραιος $m \geq 2$ δεν είναι πρώτος, τότε έχει έναν πρώτο διαιρέτη p με $p \leq \sqrt{m}$.

12. (α') Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Δείξτε ότι $2^n - 1 | 2^{nm} - 1$. Συμπεράνατε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε και ο n είναι πρώτος.
    (β') Εστω $k, r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $2^{2^r} + 1 | 2^{2^r(2k+1)} + 1$. Συμπεράνατε ότι αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το n είναι μιά δύναμη τού 2.

13. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:
    (α') Αν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a + b, a - b) = 1$ ή 2.
    (β') Αν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a - b, a^2 + ab + b^2) = 1$ ή 3.
    (γ') Για κάθε μιά από τις παρακάτω εξισώσεις, βρείτε όλες τίς λύσεις της x, y που είναι φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τα δύο πρωτα ερωτήματα και το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους αριθμούς).
       1. $x^2 - y^2 = 135$
       2. $x^2 - y^2 = 72$
       3. $x^3 - y^3 = 721$

4. $x^3 - y^3 = 3087$

14. Συμβολίζουμε ως $[a]$ τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{Z}_n$ των ακεραίων modulo n. Βρείτε $a \in \mathbb{Z}$, με $0 \leq a \leq n-1$, τέτοιο ώστε:

    (α΄) $[136] = [a]$ στο $\mathbb{Z}_7$.

    (β΄) $[-32] = [a]$ στο $\mathbb{Z}_7$.

    (γ΄) $[a] = [-532]$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.

    (δ΄) $2[a] = [5]$ στο $\mathbb{Z}_9$.

15. Έστω a περιττός ακέραιος. Δείξτε ότι

    (α΄) το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 δια τού 4 ισούται με 1.

    (β΄) το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 δια τού 8 ισούται με 1.

16. (α΄) Δείξτε ότι αν $a \in \mathbb{N}$ με $(a, 10) = 1$ τότε $a^2 \equiv 1 \mathrm{mod} 10$ ή $a^2 \equiv 9 \mathrm{mod} 10$.

    (β΄) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $4^n \equiv 4 \mathrm{mod} 10$ ή ότι $4^n \equiv 6 \mathrm{mod} 10$

    (γ΄) Αν $a \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι τό τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τού a^2 δεν μπορεί να είναι 2.