Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Δεύτερο Σύνολο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 18-11-2021

Οδηγίες: Να επιλέξετε 8 από τις ασκήσεις, τουλάχιστον 2 από την ομαδα 1-5.

1. Από τη θεωρία έχουμε δεί ότι αν $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ τότε το $\mathbb{V}(\mathfrak{p})$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο. Δείξτε ότι το παραπάνω δεν ισχύει αν πάρουμε αντί τού $\mathbb{C}$ ένα μη αλγεβρικά κλειστό σώμα, πχ το $\mathbb{R}$. Ειδικότερα, βρείτε ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ τού $\mathbb{R}[x,y]$ τέτοιο ώστε το $\mathbb{V}(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{R}^2$ να είναι μή κενό και μή ανάγωγο.
Υπόδειξη: α) Βρείτε δύο πολυώνυμα $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ (προσπαθείστε να επιλέξετε τα απλούστερα δυνατά) με $\mathbb{V}(f,g) = \{(0,0),(1,0)\}$. β) Δείξτε ότι αν $f,g \in \mathbb{R}[x,y]$ (οποιαδήποτε πολυώνυμα) τότε υπάρχει $h \in \mathbb{R}[x,y]$ με $\mathbb{V}(f,g) = \mathbb{V}(h)$. γ) Δείξτε ότι το h είναι ανάγωγο με χρήση τού ορισμού, γράφοντάς το ως πολυώνυμο μιας μεταβλητής με συντελεστές πολυώνυμα τής άλλης μεταβλητής.

2. Δείξτε ότι το k^n είναι ανάγωγο (ως προς την τοπολογία Zariski).
Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι $\mathbb{I}(k^n) = \langle 0 \rangle$. Προσπαθείστε το πρώτα για $n=2$: Έστω $f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_n(x)y^n \in \mathbb{I}(k^n)$. Δείξτε πρώτα ότι $a_0(x) = 0$ (το μηδενικό πολυώνυμο). Μετά δείξτε ότι $a_1(x) = 0$ κλπ. Μετά αποδείξτε το για οποιοδήποτε n.

3. (α') Έστω $V \subset k^n$ αλγεβρικό και $p \notin V$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ με $f(q) = 0$ για κάθε $q \in V$ αλλά $f(p) = 1$. Ισχύει πάντα το ίδιο αν το V δεν είναι αλγεβρικό;
   (β') Δείξτε ότι αν $A, B \subset \mathbb{C}^n$ με $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ ($\overline{A}, \overline{B}$ είναι οι κλεστές θήκες ως προς την τοπολογία Zariski) τότε υπάρχει πολυώνυμο $f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ με $f(q) = 0$ για κάθε $q \in A$ αλλά $f(p) = 1$ για κάθε $p \in B$.

   Υπόδειξη: Για το α) να 'μεταφράσετε' την υπόθεση με χρήση τού τελεστή $\mathbb{I}$. Για το β) γράψτε $\overline{A} = \mathbb{V}\mathbb{I}(A)$ και $\overline{B} = \mathbb{V}\mathbb{I}(B)$. Τότε $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{V}(??)$. Εφαρμόστε την NSS.

4. (α') Έστω $V \subset k^n$ και $W \subset k^m$ αλγεβρικά υποσύνολα των k^n και k^m, αντιστοίχως. Δείξτε ότι το $V \times W \subset k^n \times k^m = k^{n+m}$ είναι αλγεβρικό υποσύνολο τού k^{n+m}.
   (β') Δείξτε ότι αν τα παραπάνω V, W είναι ανάγωγα, τότε και το $V \times W$ είναι ανάγωγο (δείτε την υπόδειξη στην άσκηση 3.9 στο βιβλίο τού Kemper).

5. (α') Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τού $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x]$ που δεν είναι κλειστό ως προς την τοπολογία Zariski (δηλ. το αντίστοιχο μονοσύνολο που ορίζεται από το σημείο δεν είναι κλειστό υποσύνολο τού $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x]$). Ποιά είναι η κλειστή του θήκη;
   (β') Να διερευνήσετε το ανάλογο ερώτημα για το $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x,y]$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 10 τού 1ου Συνόλου Ασκήσεων).

6. Έστω R_1, R_2 δακτύλιοι και $R = R_1 \oplus R_2$ (ο R είναι το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων R_1, R_2 με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη).
   (α') Να περιγράψετε τα ιδεώδη του R.
   (β') Να αποδείξετε ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether αν και μόνο αν οι δακτύλιοι R_1 και R_2 είναι δακτύλιοι της Noether.

7. Έστω $R = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$, το (άπειρο) ευθύ γινόμενο των σωμάτων $\mathbb{F}_2$ με πράξεις το άθροισμα και τον πολλαπλασιασμό ανά συντεταγμένη.
   (α') Να περιγράψετε τα αντιστρέψιμα στοιχεία και τους διαιρέτες του μηδενός του R.

(β΄) Να αποδείξετε ότι ο R δεν είναι δακτύλιος της Noether.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{maxSpec}(R)$.

8. Να αποδείξετε ότι ο $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ είναι δακτύλιος της Noether. Να βρείτε την ελάχιστη απέριττη πρωταρχική ανάλυση του $\langle 18\rangle$.

   Υπόδειξη: Ο δακτύλιος R δεν είναι Π.Κ.Ι. Να χρησιμοποιήσετε την ανάλυση $18 = 2\cdot 9 = (1+\sqrt{-17})(1+\sqrt{-17})$ και τα ιδεώδη $\langle 3\rangle$, $\langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle$.

9. Έστω $R = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, $I = \langle m_1,\dots,m_s\rangle$, όπου $m_i = x_1^{a_{1i}}\cdots x_n^{a_{ni}}$ (μονώνυμα), για $i = 1,\dots,s$. Το I λέγεται *μονωνυμικό ιδεώδες* του R.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ αν και μόνο αν κάθε μονωνυμικός όρος του $f(x_1,\dots,x_n)$ διαιρείται από κάποιο γεννήτορα $m_i:\ i\in\{1,\dots,s\}$.

   Υπόδειξη: Να γράψετε $f(x_1,\dots,x_n) = \sum h_i m_i$ και να αναπτύξετε το άθροισμα στο δεχύ μέρος της ισότητας.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η τομή δύο μονωνυμικών ιδεωδών είναι μονωνυμικό ιδεώδες και να δείξετε ότι οι μονωνυμικοί γεννήτορες της τομής προκύπτουν ως ΕΚΠ των γεννητόρων των ιδεωδών.

   (γ΄) Να αποδείξετε ότι αν $m_1,\dots,m_n, x_i^a m$ είναι μονώνυμα, με x_iνα μην διαιρεί το m, τότε $\langle m_1,\dots,m_n, x_i^a m\rangle = \langle m_1,\dots,m_n,x_i^a\rangle \bigcap \langle m_1,\dots,m_n,m\rangle$.

   (δ΄) Να περιγράψετε τα ανάγωγα μονωνυμικά ιδεώδη του $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$.

   (ε΄) Να περιγράψετε τα πρωταρχικά μονωνυμικά ιδεώδη του $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$.

10. Έστω $R = \Bbbk[x,y,z]$ ($\Bbbk$ σώμα) και $I = \langle x^5, x^4y^2, x^3yz, yz^2, z^3\rangle$.

    (α΄) Να βρείτε μία ελάχιστη απέριττη πρωταρχική ανάλυση του I. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν υπάρχει διαφορετική ελάχιστη απέριττη πρωταρχική ανάλυση του I.

    (β΄) Για κάθε $P\in \mathrm{Ass}(R/I)$, να βρείτε a, έτσι ώστε $(I:a) = P$, για $P\in\mathrm{Ass}(R/I)$.

    (γ΄) Να βρείτε ένα στοιχείο του R/I που να μην ανήκει στο $Z(R/I)$.

11. (α΄) Να αποδείξετε ότι αν R είναι δακτύλιος της Noether, τότε κάθε μη μηδενικό, μη αντιστρέψιμο στοιχείο του R, έχει μία ανάλυση ως πεπερασμένο γινόμενο αναγώγων στοιχείων.

    (β΄) Να αποδείξετε ότι ο $R = \mathbf{Q}[x, x^{1/2}, x^{1/4},\cdots]$ δεν είναι δακτύλιος της Noether. Να εξετάσετε αν το x έχει μία ανάλυση ως πεπερασμένο γινόμενο αναγώγων στοιχείων.

12. Ένας *βαθμωτός* δακτύλιος είναι ένας δακτύλιος $(R,+,\cdot)$, όπου

$$R = R_0\oplus R_1\oplus R_2\oplus\cdots$$

    είναι το ευθύ άθροισμα των αβελιανών ομάδων R_i και

$$R_i\cdot R_j\subset R_{i+j}\ \text{ για } i,j\geq 0.$$

    (α΄) Να δείξετε ότι το σύνολο R_0 είναι υποδακτύλιος του R, ενώ το σύνολο $R_1\oplus R_2\oplus\cdots$ είναι ιδεώδες του R.

    (β΄) Να αποδείξετε ότι αν $a_1,\dots,a_n$ παράγουν το ιδεώδες $R_1\oplus R_2\oplus\cdots$, τότε $R = R_0[a_1,\dots,a_n] := \{f(a_1,\dots,a_n) : f(x_1,\dots,x_n)\in R_0[x_1,\dots,x_n]\}$.

    (γ΄) Να δείξετε ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether αν και μόνο αν ο R_0 είναι δακτύλιος της Noether και $R_1\oplus R_2\oplus\cdots$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες.

13. Έστω $R = \mathbb{C}[[z]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i : a_i\in\mathbb{C}\}$, ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών.

    (α΄) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του R είναι $U(R) = \{\sum a_i z^i : a_0\in\mathbb{C}^*\}$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι αν $0 \neq I \lhd R$ είναι γνήσιο, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $I = \langle z^n \rangle$.

(γ΄) Να συμπεράνετε ότι ο R α) έχει ένα μοναδικό μέγιστο ιδεώδες β) είναι δακτύλιος της Noether.

(δ΄) Να περιγράψετε το σώμα κλασμάτων του R.

14. Έστω $R = \mathbb{C}[[z]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i : a_i \in \mathbb{C}\}$, ο δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών.

(α΄) Να θεωρήσετε τον υποδακτύλιο A_1 του R που αποτελείται από τις απειροσειρές που *συγκλίνουν* για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι ο A_1 δεν είναι δακτύλιος της Noether.
Υπόδειξη: Έστω $I_i = \{f \in A : f(t) = 0, \text{ για } t \geq i\}$. Να βρείτε $f \in I_{i+1} \setminus I_i$.

(β΄) Να θεωρήσετε τον υποδακτύλιο A_2 του R που αποτελείται από τις απειροσειρές με *θετική ακτίνα σύγκλισης*. Να αποδείξετε ότι ο A_2 είναι δακτύλιος της Noether.
Υπόδειξη: Αν $f \in A_2$ και $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ με $a_n \neq 0$, τότε $f(z) = z^n g$, όπου το $g \in U(A_2)$.