R, S πολ. κλειστό υποσύνολο του R

$R \to S^{-1}R$

$r \mapsto \frac{r}{1}$

Γνήσια Ιδεώδη του $S^{-1}R$.

$J \to J^c$, $(J^c)^e$

Ιδεώδη του R που η τομή με $S = \emptyset$

$J^c = \{r \in R : \frac{r}{1} \in J\}$

$(J^c)^e = J^c(S^{-1}R)$.

Αν $I \trianglelefteq R$ και $I^e = IS^{-1}R$

$I \subseteq (I^e)^c = \{r : \exists\, u \in S$ με $ur \in I\}$

Άσκηση

$P \in \operatorname{Spec}(R)$ τότε

$P^n \subseteq (P^n)^{ec}$ είναι P-πρωταρχικό ιδεώδες

I

(επέκταση στον R_P).

R δ. Noether

Πρόταση $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

Έστω

$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ ε.α.π. ανάλυση του I

Q_i − P_i πρωταρχικά

$\operatorname{rad}(Q_i) = P_i$ $(\operatorname{Ass}(R/I) = \{P_1, \dots, P_n\})$

και έστω $P = P_1$ ελαχιστοτικό στο $\operatorname{Ass}(R/I)$.

Τότε $Q_1 = (IR_P)^c$ και άρα μοναδικό

ΑΠ

Αφου $P \not\supset P_i$ $i \neq 1$

$\Rightarrow$ $P_i R_p = R_p$ $i \neq 1$

και $Q_i R_p = R_p$ $i \neq 1$.

Επομενως

$$I R_p = (Q_1 \cap \dots \cap Q_n) R_p$$
$$= Q_1 R_p \cap \dots \cap Q_n R_p$$
$$= Q_1 R_p \cap R_p \cap \dots \cap R_p$$
$$= Q_1 R_p$$

$(Q_1 R_p)^c = \{ r \in R : ur \in Q_1 \}$ για καποιο $u \notin P = \operatorname{rad} Q_1$

$= Q_1$

$\blacksquare$

$\boxed{*\ R \text{ δ.ο. N.} \Rightarrow S^{-1}R \text{ δ.ο. Noeth}}$

Προταση

Εστω $I \underset{\neq}{\triangleleft} R$ και εστω $P \in \operatorname{Spec} R$ και $I \subset P$ ελαχιστοτικο τοτε το $P \in \operatorname{Ass}(R/I)$

ΑΠ

Εστω.

$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ ε.α.π. αναλυση

$Q_i - P_i$-πρωταρχ

$\operatorname{Ass}(R/I) = \{P_1, \dots, P_n\}$

Εστω οτι $P \notin ASS(R/I)$ (3)

Αφου P ελαχιστοτιμο $\Rightarrow$

$$P_i R_p = R_p \quad \forall i = 1, \dots, n$$

και αρα $Q_i R_p = R_p$

$$I R_p = R_p \quad \rightarrow\leftarrow$$

αφου $I R_p \underset{\neq}{\trianglelefteq} R_p$

Πορισμα υπαρχει πεπερασμ.

πρωτων ιδεωδων που

περιεχουν ελαχιστοτιμο

το $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$.

R δακτύλιος Nöther, $I \trianglelefteq R$, $V_{\operatorname{spec} R}(I) = \{ p \in \operatorname{Spec} R,\ I \subseteq p \}$

Έχει πεπερασμένο πλήθος ελαχιστοτικά $P_1, \dots, P_m$

$V_{\operatorname{spec} R}(I) = V_{\operatorname{spec} R}(P_1) \cup \dots \cup V_{\operatorname{spec} R}(P_m)$

→ Ερώτημα: Έστω $I = q_1 \cap \dots \cap q_n$ (*) μια πρωταρχική ανάλυση (ελάχιστη, αστρίτ.)

Ποιά η σχέση με τα παραπάνω ?

$V_{\operatorname{spec} R}(I) = V_{\operatorname{spec}}(\operatorname{Rad} I)$

(*) $\operatorname{Rad} I = p_1 \cap \dots \cap p_n$, $p_i = \operatorname{Rad} q_i$

$V_{\operatorname{spec}}(I) = \underset{\text{ανάγ.}}{V_{\operatorname{spec}}(p_1)} \cup \dots \cup \underset{\text{ανάγ}}{V_{\operatorname{spec}}(p_n)}$

Αν $P_1, \dots, P_m$ τα ελαχιστοτικά των $\operatorname{Ass}(R/I)$ τότε

$$\mathbb{V}_{specR}(I) = \mathbb{V}_{specR}(p_1) \cup \dots \cup \mathbb{V}_{specR}(p_m).$$

$i \neq j$: $p_i \not\subseteq p_j \iff \mathbb{V}_{specR}(p_j) \not\subseteq \mathbb{V}_{specR}(p_i)$

η διάσπαση του $\mathbb{V}_{specR}(I)$ σε ανάγωγες συνιστώσες.

Από μοναδικότητα ανάλυσης! τα ελαχιστοτικά των $\mathbb{V}_{specR}(I)$ είναι τα ίδια με τα —— " —— των $Ass(R/I)$.

<u>Δακτύλιος Συντεταγμένων αλγ. συνόλου</u>: $V \subseteq k^n$ αλγ. υποσύνολο.

Συμβολίζουμε ως: $k[V] = k[x_1, \dots, x_n] / \mathbb{I}(V)$

(δακτύλιος συντεταγμένων του V ή δακτύλιος των regular συναρτήσεων του V)

→ $f, g : k^n \xrightarrow{\text{πολ. συναρτ.}} k$: τότε $f|_V = g|_V \Leftrightarrow \bar{f} = \bar{g} \in k[V]$

Τα στοιχεία του $k[V]$ αντιστοιχούν σε $V \xrightarrow{\text{πολυων.}} k$

<u>Συμβολισμός – Ορισμός</u>: Έστω $R \subseteq S$ (υποδακτύλιος) επέκταση δακτυλίων.

Έστω $a_1, \dots, a_n \in S$: Συμβολίζουμε ως $R[a_1, \dots, a_n] \subseteq S$ τις πολυωνυμικές εκφράσεις των $a_1, \dots, a_n$ με συντελεστές σε R.

- $R[a_1, \dots, a_n]$ είναι υποδακτύλιος του S.
- Ο "μικρότερος" υποδακτύλιος του S που περιέχει το R κ' τα $a_1, \dots, a_n$.

$R \subseteq S$: Ο S λέμε ότι είναι π.π. ως δακτύλιος $/R$ (υποδακτύλιος)
ή ότι είναι μια π.π. R-άλγεβρα αν
$\exists\, a_1, \dots, a_n \in S$ με $S = R[a_1, \dots, a_n]$
Ισοδύναμα, $\exists$ επιμορφισμός δακτυλίων

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\text{επί}} S \; :$$

Πράγματι: αν $S = R[a_1, \dots, a_n]$ παίρνε $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\text{επί}} S$, $x_i \longrightarrow a_i$

αντίστοιχα, αν $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\text{επί}} S$ τότε

$$S = R[x_1, \dots, x_n] / \ker\varphi = R[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n].$$

Επιπλέον: Ένας δακτύλιος R λέγεται reduced αν δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία

Σημ. Ο R/I είναι reduced αν I ριζικό.
$\bar{a} \neq 0$: $\bar{a}^m = \bar{0} \Leftrightarrow a^m \in I$, $a \notin I$

→ Ο δακτύλιος $K[V]$ είναι μια reduced π.π. K-άλγεβρα ($R = k$ σώμα): ο $K[V]$ είναι δ.χ./K.

Αντίστροφα, αν K = αλγ. κλειστό, τότε μια reduced π.π. K-άλγεβρα S είναι της μορφής $K[V]$.

Πράγματι, $S \cong K[x_1, \dots, x_n]/I$, I ριζικό, οπότε παίρνουμε $V = V(I)$.

Τότε $K[V] = K[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(V) \overset{NSS}{=} I$.

→ Αν S_1, S_2 είναι δύο (π.π.) R-άλγεβρες, τότε ένας $\varphi: S_1 \longrightarrow S_2$ λέγεται ομομορφισμός R-αλγεβρών, αν

- φ ομομορφισμός δακτυλίων
- $\varphi(r) = r$, $\forall r \in R$. (π.χ. $R = k$ σώμα, τότε φ είναι γραμμική/k)

→ **Ορισμός!** Έστω $V \subseteq k^n$, $W \subseteq k^m$ αλγ. σύνολα

Μια απεικόνιση $\varphi : V \to W$ λέγεται μορφισμός αλγεβρικών συνόλων αν επάγεται από πολυωνυμική απεικόνιση

$$\underset{\substack{\| \\ (f_1, \dots, f_m)}}{\Phi} : k^n \longrightarrow k^m \quad \text{με } \Phi(V) \subseteq W, \text{ οπότε } \varphi = \Phi|_V$$

, $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Πρόταση Ο παραπάνω μορφισμός $\varphi : V \to W$ επάγει έναν ομομορφισμό k-αλγεβρών $\tilde{\varphi} : k[W] \longrightarrow k[V]$

Πράγματι,

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, dashed, bend left, "g\circ\Phi"] & K^m \arrow[r, "g"] & K
\end{tikzcd}
$$

πολυωνυμική $\quad$ πολυωνυμική

$$
\begin{tikzcd}
K[x_1,\dots,x_m] \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi_W"'] & K[x_1,\dots,x_n] \arrow[d, "\pi_V"] \\
K[x_1,\dots,x_m]/\mathcal{I}(W) = K[W] \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}"] & K[V] = K[x_1,\dots,x_n]/\mathcal{I}(V)
\end{tikzcd}
$$

$g \longmapsto g\circ\Phi$

??

$\overline{g} \longmapsto \overline{g\circ\varphi}$

Δείξτε ότι $\begin{cases} \text{Ο καλός ορισμός της } \tilde{\varphi} \text{ εξασφαλίζεται αν } \tilde{\Phi}(\mathcal{I}(W)) \subseteq \mathcal{I}(V) \quad (*) \\ \text{Το } (*) \text{ ισχύει, διότι } \Phi(V) \subseteq W. \end{cases}$

Πρόταση Ισχύει και το αντίστροφο. Έστω $V \subseteq k^n$, $W \subseteq k^m$ αλγεβρ.

και $\tilde{\varphi} : k[W] \longrightarrow k[V]$ ομομ. k-αλγεβρών.

Τότε ο $\tilde{\varphi}$ επάγει μορφισμό $\varphi : V \to W$

Απόδειξη $k[W] = k[x_1, \dots, x_m] / \mathbb{I}(W)$: Παίρνε $\underset{i=1,\dots,m}{\tilde{\varphi}}(\overline{x_i}) = \overline{f_i(x_1, \dots, x_n)} \in k[V]$.

$k[V] = k[x_1, \dots, x_n] / \mathbb{I}(V)$.

Πάρε $\Phi = (f_1, \dots, f_m) : k^n \longrightarrow k^m$, αυτό δουλεύει !!

→ Οι παραπάνω διαδικασίες είναι αντίστροφες μεταξύ τους.

Δείτε επόμενη
σελίδα

→ <u>Ορισμός</u>: Ένας μορφισμός $\varphi: V \to W$ λέγεται ισομορφισμός αν $\exists$ μορφισμός $\psi: W \to V$ με $\varphi \circ \psi = 1 = \psi \circ \varphi$.

Ο φ είναι ισομορφισμός $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\varphi}: K[W] \to K[V]$ ισομορφισμός K-αλγεβρών.

<u>Σημείωση</u>. Έστω $\underset{\text{ii}}{V} \subseteq \operatorname{Spec} R$ κλειστό.

Αντίστοιχο του δακτυλίου συντεταγμένων $R/\mathbb{I}_R(V) = R'$

$$V = \mathbb{V}_{\operatorname{Spec} R}(\mathbb{I}_R(V)) \text{ "}\cong\text{" } \operatorname{Spec} R'$$

→ Έστω $\varphi: S \to R$ ομομορ. δακτυλίων: επάγεται φυσιολογικά απεικόνιση $\varphi^*: \operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} S$: $\varphi^*(p) = \varphi^{-1}(p)$
↳ συνεχής ως προς τοπολογία Zariski

Ισχύει το αντίστροφο; ΟΧΙ!

π.χ. $1 : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ταυτ.}} \mathbb{C}$, $\sigma : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{συζ.}} \mathbb{C}$

επάγουν ίδια απεικόνιση $\operatorname{Spec}\mathbb{C} = \{(0)\} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{C} = \{\langle 0 \rangle\}$

$(R, \operatorname{Spec}R) \longleftarrow$ θεμελιώδης χώρος στην Αλγ. Γεωμ.

χώρος συναρτήσεων — τοπολογικός χώρος

(συγκολλήσεις αυτών την schemes).