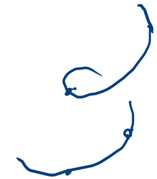
18 α) $\mathbb{V}(y-x^2, z-x^3) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$= \{(a, a^2, a^3),\ a \in \mathbb{R}\}$$



← rational normal curve

β) $\varphi : \mathbb{R}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$f(x,y,z) \longmapsto f(x, x^2, x^3)$

$\ker\varphi \overset{?}{=} \langle y-x^2, z-x^3 \rangle$??

$= \mathbb{I}(\{(a,a^2,a^3), a\in\mathbb{R}\}) = \mathbb{I}\mathbb{V}(y-x^2, z-x^3) \supseteq \langle \underline{y-x^2}, z-x^3 \rangle$

"$\supseteq$"

"$\subseteq$" Έστω $\underline{f \in \ker\varphi}$: $f \in (\overbrace{\mathbb{R}[x,z]}^{R})[y]$

$f, g \overset{\neq 0}{\in} R[y]$: αν $g(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$
δακτύλιος ↳ αντιστρ. του R.

Τότε $f = g \cdot q + r$, $q, r \in R[x]$, $\deg r < \deg g$

$\mathbb{Z}[x]$

$x^2 \mid 2x$

$2x^2 + 3x + 1 \mid x+1$

$-2x^2 + 2x \qquad 2x - 1$

$-x + 1$ - - . . -

$$f(x,y,z) = (y-x^2)\,q(x,y,z) + r(x,z).$$

$$r(x,z) = (z-x^3)\,q_1(x,z) + r_1(x).$$

$r(x,z) \in (\mathbb{C}[x])[z]$

Άρα $\forall\, f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ γράφεται ως

$$f(x,y,z) = (y-x^2)\,q(x,y,z) + (z-x^3)\,q_1(x,z) + r_1(x)$$

Αν $f \in \ker\varphi$ τοπ...... $r_1(x) = 0$ άρα $f \in \langle y-x^2,\ z-x^3\rangle$.

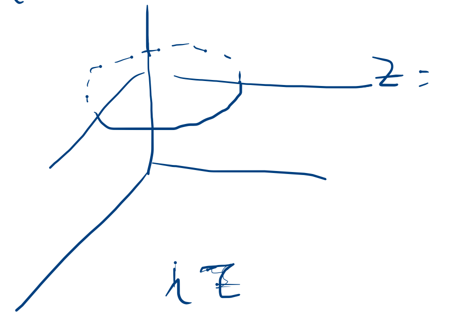
γ) $\mathbb{I}\,\mathbb{V}(y-x^2,\ z-x^3) = \langle y-x^2,\ z-x^3\rangle$.

$\mathbb{I}\,\mathbb{V}(y-x^2,\ z-x^3) = \ker\varphi$: $\mathbb{R}[x,y,z] \big/ \langle y-x^2,\ z-x^3\rangle \cong \mathbb{R}[x]$ α.π.

άρα πρώτο.

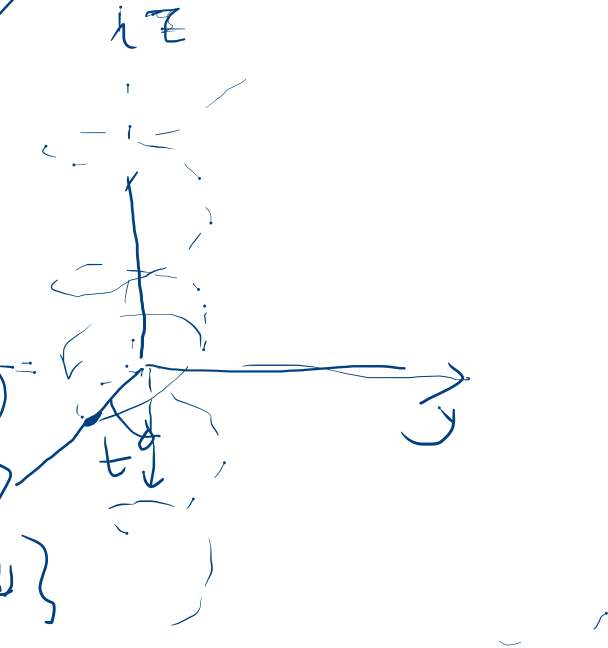
(17) α) $\{(\cos t, \sin t, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ αλγεβρικό

$$= V(x^2+y^2-1, \; z-1)$$



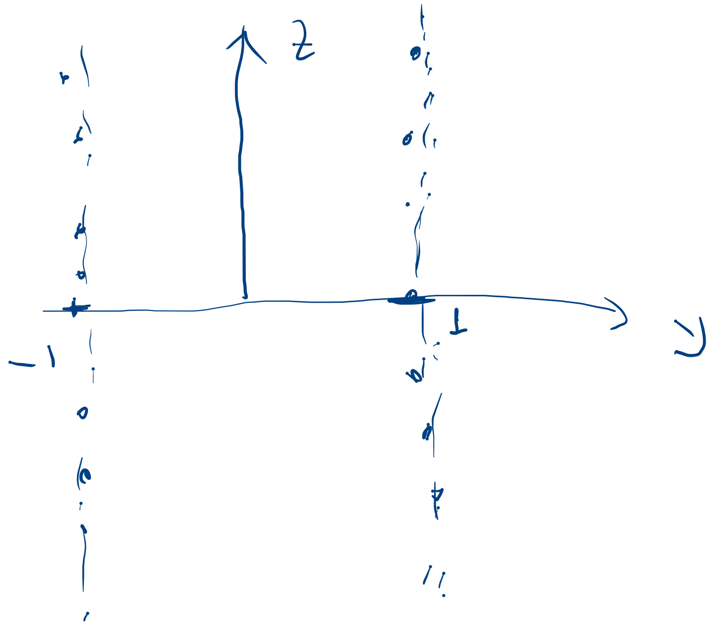
$$\left[\{(\cos t, \sin t)\} \subseteq \mathbb{R}^2 = V(x^2+y^2-1) \right]$$

β) $A = \{(\cos t, \sin t, t)\}$ όχι αλγεβρικό.



$$A \cap V(x=0) = \{(0, 1, \pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \; (0, -1, -\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{0, (-1)^k, \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$$



$A \cap V(x, y-1)$ αλγεβρικό ! ξ δεν γίνεται!!

αυστηρό!!

• αν A αλγεβρικό, τότε

16

$\mathrm{rad}(\mathrm{rad}\, I) = \mathrm{rad}\, I$

$\mathrm{rad}(I \cap J) = \mathrm{rad}\, I \cap \mathrm{rad}\, J$

Ρεσρεελ, $\mathrm{rad}(p^n) = p \xrightarrow{\text{θεώρημα}} \mathrm{rad}(I^n) = \mathrm{rad}\, I$ (*)

$\mathrm{rad}(I+J) = \mathrm{rad}(\mathrm{rad}\, I + \mathrm{rad}\, J)$.

(*) $\mathrm{rad}(IJ) = \mathrm{rad}(I \cap J) \quad [IJ \subseteq I \cap J]$

$\mathrm{rad}(I^n) = \mathrm{rad}(I \cap \dots \cap I) = \mathrm{rad}(I)$

$\mathrm{rad}\, I = \underline{\mathrm{rad}(I^n)} \overset{?}{=} \underline{(\mathrm{rad}\, I)^n}$

$I = \langle x \rangle \in k[x]$: $\mathrm{rad}(I^n) = \mathrm{rad}(\langle x^n \rangle) = \langle x \rangle$

$\mathrm{rad}(I) = \langle x \rangle$, αρα $(\mathrm{rad}(I))^n = \langle x^n \rangle \subsetneq$

15 $I = \langle xz - y^2, yz - x^2 \rangle$ όχι πρώτο

$$(x-y)(x+y+z) = (xz-y^2) - (yz-x^2) \in I$$

$$\underset{I}{\not\in} \qquad \underset{I}{\not\in}$$

αν $\overset{I}{\underset{\in}{x-y}} = h(x,y,z)(xz-y^2) + g(x,y,z)(yz-x^2)$

$1 \cdot x$ το x δεν εμφανίζεται

14 $\varphi : R \xrightarrow{\text{επιμορφ.}} R$, R Nötherian. Δείξτε ότι είναι $\cong$.

αν όχι, $\exists \ker\varphi \neq 0$: παίρνω $x_0 \in \ker\varphi$.

$I_1 = \varphi^{-1}(I_0)$, $\exists\, x_1 \in I_1$ ώστε $\varphi(x_1) = x_0$

$I_0 \subsetneq I_1$: αν "=" τότε $x_1 \in I_0$ και $\varphi(x_1) = 0 \neq x_0$ άτοπο συνεχίζει το να θέτω $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots$ άπειρα...

- $\ker \varphi \subsetneq \ker \varphi^2 \subsetneq \dots$

(13) $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, \dots] / \langle x_1, x_2^2, x_3^3, \dots \rangle$

$$\mathrm{rad}\langle \bar{0} \rangle \overset{?}{=} \underbrace{\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \rangle}_{J}.$$

$$\langle \bar{0} \rangle \subseteq J \subseteq \mathrm{rad}(\langle \bar{0} \rangle)$$

↳ διότι $\bar{x}_n^n = 0, \ \forall n$.

Θέλω να δείξω J μέγιστο ? Ναι διότι J μέγιστο.

$K[x_1, \dots, x_n, \dots]/J \cong K$.

(12) R Noether : $(\mathrm{rad}\langle 0\rangle)^n = \langle 0\rangle$, κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

$(I^k \subseteq I^{k-1} \subseteq \dots \subseteq I)$

$\mathrm{rad}\langle 0\rangle = \langle a_1, \dots, a_s\rangle$, $\underline{\underline{a_i^{n_i} = 0}}$, κάποιο n_i

$(\mathrm{rad}\langle 0\rangle)^n = \langle a_{i_1} \cdots a_{i_n}, \ 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq s \rangle$

δείξτε ότι $\exists n$ τ.ω. ↑ μηδέν . . . .

$S = 1$ ✓

$S = 2$: . . . .

(11) . . . .

(10) $R = K[x,y] = K[x][y]$.

$R = Z[y]$, $Z = $ Ε.Π. Βρες τα πρώτα ιδεώδη P.

- $P = \langle 0 \rangle$ ✓ Έστω $P \neq \langle 0 \rangle$.

Εξετάζω: $P \cap Z = i^{-1}(P) = P^c$ $\qquad Z \xhookrightarrow{i} Z[y]$.

1η περίπτωση: $P \cap Z = \langle 0 \rangle$: $\quad Q = q.f(Z)$.

$$Z[y] \xhookrightarrow{j} Q[y]$$

$$P \rightsquigarrow P^e =$$

- P^e είναι πρώτο: Τα στοιχεία του P^e είναι της μορφής $\dfrac{h(y)}{s}$, $h(y) \in P$, $s \in Z^*$

- $P^e = \left\langle \dfrac{h(y) \in P}{s \in Z^*} \right\rangle$: $h(y)/s$ ανάγωγο το $Q[y]$

δηλαδή ότι το $\langle \underbrace{h_{primitive}}_{\in \mathbb{Z}[x]}(y) \rangle = P$

$h_{primitive}$: ανάγωγο.

$\rightarrow \underbrace{P \cap \mathbb{Z}}_{\text{πρώτο ιδεώδες του } \mathbb{Z}} \neq \langle 0 \rangle$ άρα $P \cap \mathbb{Z} = \langle \underbrace{p}_{\text{πρώτος}} \rangle$

p → ανάγωγο του $\mathbb{Z}$

Άρα $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ σώμα

$$\mathbb{Z}[y] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[y] = \mathbb{Z}[y]/\langle p \rangle$$

$$P = \langle p, f(y) \rangle \longrightarrow \overline{f}(y) \text{ ανάγωγο.}$$