→ $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ P-πρωταρχικό αν

$fg \in I$ και $f \notin I \Longrightarrow$ $g \in rad(I) = P$

Η ανάλυση $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ είναι ε.α.π.α ανάλυση του I αν:

- Q_i είναι P_i-πρωταρχικά
- $P_i \neq P_j$ όταν $i \neq j$
- $I \subsetneq Q_1 \cap \cdots \cap \widehat{Q_i} \cap \cdots Q_t$

Παραδ. $I = \langle x^2, xy \rangle$

$xy \in I$, $x \notin I$. Επιβεβαιώστε ότι $y \notin rad(I)$

$rad(I) = ?$

I δεν είναι πρωταρχικό

• $I = \langle x^2, yx \rangle$

$yx \in I$, $y \notin I$ και $x^2 \in I$ άρα $x \in rad(I)$

ωστόσο αυτό δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι I πρωταρχικό

• τομή δύο P-πρωταρχικών είναι P-πρωταρχικό ιδεώδες

Πρόταση

Έστω ότι Q είναι P-πρωταρχικό ιδεώδες και $a \notin Q$ τότε $(Q : a)$ είναι P-πρωταρχικό.

Απ.

Θα δείξουμε ότι

$rad(Q:a) = P$ ✓

"$\supset$" $Q \subset rad(Q:a) \Rightarrow$

$rad(Q) \subset rad(Q:a)$

$\Rightarrow P \subset rad(Q:a)$

"$\subset$" Εστω ότι $f \in rad(Q:a)$

$\Rightarrow f^n \in (Q:a) \Rightarrow f^n a \in Q$

$a \notin Q \Rightarrow f^n \in rad(Q) = P \Rightarrow$

Q είναι P-πρωτ. $f \in P \Rightarrow rad(Q:a) \subset P$

Εστω ότι $fg \in (Q:a)$

και έστω $f \notin (Q:a)$.

Άρα

$fga \in Q$ και $fa \notin Q$

$\Rightarrow g \in rad(Q) = P$

$= rad(Q:a)$

Παρατήρηση

$(I_1 \cap I_2) : a = (I_1 : a) \cap (I_2 : a)$

Ορισμός

Associated primes του R/I

Προσαρτημένα πρώτα

$Ass(R/I) = \{ P \in Spec(R) : P = (I:a) \}$

Θεώρημα R δ. Noether
$I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ και έστω
$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$ μια ε.α.π.α
όπου Q_i είναι P_i - πρωταρχικό

Τότε $P_i \in Ass(R/I)$

Αντίστροφα αν $P \in Ass(R/I)$ τότε $P = P_i$ για κάποιο $i = 1, \dots, t$

Απ

Έστω $P \in Ass(R/I) \Longrightarrow$
$\exists\, a \in R$ τ.ω. $P = (I : a)$

Αφού
$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_t \Longrightarrow$
$(I : a) = (Q_1 : a) \cap \dots \cap (Q_t : a)$
P

P ανάγωγο $\Longrightarrow$ $\exists\, i = 1, \dots, t$
τ.ω. $P = (Q_i : a)$
Όμως $(Q_i : a)$ είναι P_i-πρωτ.
$\Rightarrow rad(P) = rad(Q_i : a)$
$P \quad '' \quad = P_i$

Έστω. $P = P_1 = rad(Q_1)$.
Θα βρούμε $a \in R$ τ.ω.
$P = (I : a)$
Παρατήρηση Αφού R δ. Noeth και P είναι π.π. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P^n \subset Q_1$ (γιατί?)

$J = Q_2 \cap \dots \cap Q_t \overset{?}{\supsetneq} I$

Ισχυρισμός: $P^n \cdot J \subset I = Q_1 \cap J$
Άρα $\exists\, m \geq 1$ τ.ω.
$P^m J \subset I$ και $P^{m-1} J \not\subset I$

Έστω $a \in P^{m-1}] \setminus I$

$a \notin I$, $a \in Q_2, \dots, Q_t$

$$(I:a) = (Q_1:a) \cap \underbrace{(Q_2:a)}_{R} \cap \dots \cap \underbrace{(Q_t:a)}_{R}$$

$$= (Q_1:a)$$

Άρα

$$(I:a) = (Q_1:a) \subset \underbrace{P_1}_{\operatorname{rad}(Q_1:a)} = P$$

Επομένως

$(I:a) \subset P$

Έστω $f \in P$ π.Ν.Δ.Ο. $f \in (I:a)$

δηλ. $fa \in I$ ✓

Πράγματι $\left.\begin{matrix} f \in P \\ a \in P^{m-1}] \end{matrix}\right\} \Rightarrow fa \in P^{m}] \subset I$

$\Rightarrow P \subset (I:a)$

Άρα $P = (I:a)$

Πορίσματα: R δ. Noether, $I \subsetneq R$

① $\operatorname{Ass}(R/I) \neq \emptyset$

② $\operatorname{Ass}(R/I)$ είναι πεπερασμ.

③ Τα ριζικά των πρωταρχ. ιδεωδών σε μια οποιαδήποτε ε.α.π.α του I είναι μοναδικά καθορισμένα

④ Ο αριθμός των πρωταρχ. ιδεωδών είναι μοναδικός σε μια ε.α.π.α του I

Παραδ. $I = \langle x^2, xy \rangle$

$= \langle x^2, x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle =$

$= \langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle$

$\mathrm{Ass}(R/I) = \{ \langle x \rangle , \langle x, y \rangle \}$

Έστω $I = \langle 0 \rangle$ *

$\mathrm{Ass}(R/\langle 0 \rangle) =: \mathrm{Ass}(R)$

Άρα

$\langle 0 \rangle = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ ε.ο.π.α

τα Q_i είναι P_i -πρωταρχικά

όπου

$P_i = (0 : a_i) =$

$= \mathrm{ann}(a_i)$

* $a_i \neq 0$ (αν $a_i = 0 \Rightarrow$ $(0 : 0) = R$)

Παρατήρηση

Έστω $a \in R$

$$\varphi_a : R \xrightarrow{a} R, \quad r \longmapsto ra \qquad \operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{ann}(a)$$

ομομ. ομάδων

$\varphi(sr) = s\varphi(r)$

⇝ "γραμμ." συναρτήσεις

R-modules ⟷ K-διανυσμ. χώρους

Έστω $P = \mathrm{ann}(a) \in \mathrm{Spec}(R)$

άρα $P \in \mathrm{Ass}(R)$

και τότε $P = \operatorname{Ker}\varphi_a$

$R/P \xhookrightarrow[\text{υπο-ομάδα}]{} R$

ΣΥΝΟΛΟ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ ΤΟΥ R. $\cup \{0\}$

$= Z(R)$.

• Είναι ιδεώδες ?

<u>Προταση</u> R δ. Noether $Z(R) = \bigcup_{P \in Ass(R)} P$

<u>Απ</u>

"$\supseteq$" Εστω $P \in Ass(R)$ τοτε $\exists\, 0 \neq a \in R$ $P = ann(a)$ Αρα αν $0 \neq b \in P \Rightarrow ba = 0 \Rightarrow$ b είναι διαιρ. του μηδενος

<u>Αρα</u> $\bigcup_{P \in Ass(R)} P \subset Z(R)$

"$\subseteq$"

Εστω $0 \neq a \in Z(R)$

Αρα $\exists\, b \neq 0$ τ.ω. $ab = 0$

$\Rightarrow a \in ann(b)$

$S_a = \{ ann(x) : x \neq 0, x \in R, \ ax = 0 \}$

$S_a \neq \emptyset$ κ' περιεχει γνησια ιδεωδη

Συνεπως υπαρχει $Q \in S_a$ μεγιστικο στοιχειο (R δ. Noeth) $Q = ann(x)$ $a \in$

Το $Q \in Spec(R)$:

<u>Πραγματι</u> Εστω $f \cdot g \in Q$ και εστω οτι $f \notin Q$.

$fgx = 0$, $fx \neq 0$ $ann(x) \subset ann(fx)$ g

....

Ειδαμε στο προηγούμενο μάθημα:

Πρόταση

Έστω $V \neq \emptyset$ κλειστό υποσύνολο τού k^n (αντ. $\mathrm{Spec(R)}$). Το V είναι τοπολογικός χώρος με την επαγόμενη τοπολογία Zariski. Τότε το V είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το $\mathbb{I}(V)$ (αντ. $\mathbb{I}_R(V)$) είναι πρώτο ιδεώδες τού $k[x_1, \ldots, x_n]$ (αντ. R).

Πόρισμα

Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα

$$\{ \text{ κλειστά ανάγωγα υποσύνολα τού } \mathbb{C}^n/\mathrm{Spec(R)}\} \leftrightarrow \{ \text{ πρώτα ιδεώδη τού } \mathbb{C}[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n]/\mathrm{R}\}.$$

$$\mathbb{V}(P) / \mathbb{V}_{\mathrm{Spec}(R)}(P) \xleftarrow{\mathbb{V}} P$$

$$V \xrightarrow{\mathbb{I}} \mathbb{I}(V)$$

Παρατήρηση

- Τα μονοσύνολα $\{p\}$ τού k^n είναι κλειστά υποσύνολα (αλγεβρικά).
- Είναι, επομένως, τα ελαχιστοτικά (μη κενα) κλειστά υποσύνολα.
- Κάθε κλειστό υποσύνολο τού k^n περιέχει, ως υποσύνολο, ένα ελαχιστοτικό κλειστό υποσύνολο.

Ερώτημα:

Ποιά είναι η αντίστοιχη εικόνα στο $\mathrm{Spec(R)}$;

- Τα μονοσύνολα $\{p\}$ τού $\mathrm{Spec(R)}$ είναι κλειστά υποσύνολα; Οχι όλα: ένα κλειστό υποσύνολο τού $\mathrm{Spec(R)}$ είναι τής μορφής $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)},\ \mathrm{I} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Αυτό είναι μονοσύνολο αν και μόνον αν ισούται με $\{\mathfrak{m}\}(= \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\mathfrak{m}))$, όπου $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες.
- Επομένως, τα ελαχιστοτικά (μη κενα) κλειστά υποσύνολα τού $\mathrm{Spec(R)}$ είναι τα μονοσύνολα $\{\mathfrak{m}\}$, όπου $\mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες.
- Κάθε κλειστό υποσύνολο τού $\mathrm{Spec(R)}$ περιέχει, ως υποσύνολο, ένα ελαχιστοτικό κλειστό υποσύνολο.

Πόρισμα

① • Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα

$$\{\text{ Σημεία τού } \mathbb{C}^n\} \leftrightarrow \{\text{ μέγιστα ιδεώδη τού } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}.$$

$$\{p\} \xrightarrow{\;\mathbb{I}\;} \mathbb{I}(\{p\})$$

$$\mathbb{V}(m) \xleftarrow{\;\mathbb{V}\;} m$$

② • Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα

$$\{\text{ κλειστά μονοσύνολα τού } \mathrm{Spec(R)}\} \leftrightarrow \{\text{ μέγιστα ιδεώδη τού } \mathrm{R}\}.$$

Απόδειξη

② από την προηγούμενη παρατήρηση.

① Θ.δ.ο, αν m μέγιστο του $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ τότε $m = \mathbb{I}(\{p\})$, $p \in \mathbb{C}^n$ (οπότε $\mathbb{V}\,\mathbb{I}(\{p\}) = p$)

• $\mathbb{V}(m) \neq \emptyset$, $p \in \mathbb{V}(m) \Rightarrow \mathbb{I}(\{p\}) \supseteq \mathbb{I}\,\mathbb{V}(m) \overset{NSS}{=} m \Rightarrow m = \mathbb{I}(\{p\})$

Ορισμός

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται Noetherian αν κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_i \supseteq Y_{i+1} \supseteq \dots$$

γίνεται στατική.

Πρόταση

1. - Τα κλειστά υποσύνολα τού k^n (με την επαγώμενη τοπολογία Zariski) είναι Noetherian τοπολογικοί χώροι.
2. - Αν R δακτύλιος τής Noether, τα κλειστά του υποσύνολα τού $\mathrm{Spec(R)}$ (με την επαγώμενη τοπολογία Zariski) είναι Noetherian τοπολογικοί χώροι.

Απόδειξη

1. $V \subseteq k^n$: $(V \supseteq) V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ (V_i κλειστά του k^n) (*)

↳ αλγεβρικό

$$\mathbb{I}(V_1) \subseteq \mathbb{I}(V_2) \subseteq \dots \subseteq \underbrace{k[x_1, \dots, x_n]}_{\text{Nöther}}$$

Συνέχεια τής απόδειξης

…. άρα στάσιμη, δηλ $\exists N$ τ.ω. $\mathbb{I}(V_n) = \mathbb{I}(V_N), \forall n \geq N$.

$$\overset{\mathbb{V}}{\Rightarrow} \mathbb{V}\mathbb{I}(V_n) = \mathbb{V}\mathbb{I}(V_N), \ \forall n \geq N$$

$\|$ αλγ. αλγ

$$V_n = V_N, \ \forall n \geq N.$$

άρα η $(*)$ στάσιμη. $\blacksquare$