$I \triangleleft R$ αναγωγο ιδεωδές

αν $I = I_1 \cap I_2$ κάθε φορά $I_1, I_2 \triangleleft R$ τοτε $I = I_1$ ή $I = I_2$

I πρωτο $\Rightarrow$ I αναγωγο

I αναγωγο $\not\Rightarrow$ I πρωτο

οχι παντα

$\langle x^2 \rangle$ αναγωγο $\mathbb{K}[x,y]$, $\mathbb{K}$ σωμα, οχι πρωτο.

Ασκηση

Ποια ιδεωδη ~~τ...~~ με γεννητορες μονωνυμα στον $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ είναι αναγωγα?

$A = \langle x_1^3, x_2^5 \rangle$ ειναι αναγωγο?

1.

Ερωτημα

Ποσο απεχουν τα αναγωγα ιδεωδη απο το να ειναι πρωτα?

Προταση R δακτυλιος της Noether. Καθε γνησιο ιδεωδες του R ειναι πεπερασμενη τομη αναγωγων, ιδεωδων.

Απ

$S = \{ I \underset{\neq}{\triangleleft} R :$ I δεν γραφεται ως πεπ. τομη αναγ. ιδεωδων $\}$

Αν $S = \emptyset$ ✓

Αν $S \neq \emptyset$, το S εχει μεγιστικο στοιχειο, εστω J

Αφου $J \in S \Rightarrow$

J <u>δεν</u> ειναι αναγωγο.

$J = J \cap J$

Αρα $\exists\ J_1, J_2 \triangleleft R$

$J_1 \supsetneq J$, $J_2 \supsetneq J$ και

$J = J_1 \cap J_2$

<u>Αρα</u> $J_1, J_2 \notin S \Rightarrow$

$\exists\ Q_1, \dots, Q_t$ και $L_1, \dots, L_s$ αναγωγα τ.ω.

$J_1 = Q_1 \cap \dots \cap Q_t \leftarrow$

$J_2 = L_1 \cap \dots \cap L_s \leftarrow$

$\Rightarrow$

$J = Q_1 \cap \dots \cap Q_t \cap L_1 \cap \dots \cap L_s$

$J \notin S$

$\rightarrow \leftarrow$

<u>Παραδειγματα</u>

οχι αναγωγο

① $\langle x^2, xy \rangle \overset{?}{=}$

$\langle x^2, x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle =$

$\langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle$

Ειναι η "τομη" μοναδικη?

$rad(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ $\quad rad(\langle x^2, y \rangle) = \langle x, y \rangle$

② $\langle x^2, xy, y^2 \rangle \overset{?}{=} \langle x, y \rangle^2$

$\rightarrow$

$\langle x^2, y^2, x \rangle \cap \langle x^2, y^2, y \rangle$

$=$

$\underbrace{\langle x, \cancel{y^2} \rangle}_{J_1} \cap \underbrace{\langle \cancel{x^2}, y \rangle}_{J_2}$

$rad(J_1) = rad(J_2) = \langle x, y \rangle$

3

Προταση. R δ. Noether, I αναγωγο ιδεωδες, $ab \in I$, $a \notin I$. Τοτε $b \in rad(I)$

ισοδυναμα αν $ab \in I$ και $b \notin rad(I) \Rightarrow a \in I$

Απ

Εστω $ab \in I$, $a \notin I$

$\Rightarrow \langle a \rangle + I \supsetneq I$

Ιδεα. Θα βρουμε καταλληλη δυναμη του b τ.ω.

$(\langle b^n \rangle + I) \cap (\langle a \rangle + I) = I$

$I:b = (I:b) = \{ r \in R : rb \in I \}$

Παρατ $I \subset (I:b)$

$I:b \triangleleft R$

- αν $b \in I$ τοτε $(I:b) = R$

$a \in (I:b)$

$(I:b) \subset (I:b^2) \subset (I:b^3) \subset \cdots$

R δ. Noether $\Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$

$(I:b^n) = (I:b^{n+k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$(I + \langle a \rangle) \cap (I + \langle b^n \rangle) \supset I$

Θ.Δ.Ο. $I = (I+\langle a \rangle) \cap (I + \langle b^n \rangle)$

Εστω $r a + i_1 = i_2 + s b^n$

$r, s \in R$ $\quad i_1 \in I \quad i_2 \in I$

$$\Rightarrow r\cdot a + (l_1 - l_2) = s\, b^n \Longrightarrow$$

$$\underbrace{r a \cancel{b}}_{\in I} + \underbrace{(l_1 - l_2)\cancel{b}}_{\in I} = s\, b^{n+1}$$

$$\Rightarrow s \in (I : b^{n+1}) = (I : b^n)$$

$$\Rightarrow l_2 + s b^n \in I$$

$$\Rightarrow (I + \langle a \rangle) \cap (I + \langle b^n \rangle) = I$$

ανάγωγο

$$\Rightarrow I + \langle b^n \rangle = I$$

$$\Rightarrow b^n \in I \Longrightarrow b \in rad(I)\,!$$

Ορισμός

- $J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ είναι πρωταρχικό αν κάθε φορά $ab \in J$ και $a \notin J$ τότε $b \in rad(J)$

- $J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ είναι P-πρωταρχ. αν J πρωταρχικό κ' $P = rad(J)$ (Respect)

Παρατήρηση
R δ. Noether
κάθε ανάγωγο ιδεώδες είναι πρωταρχικό!

Ερώτηση Είναι κάθε πρωταρχ. ιδεώδες ανάγωγο?

Άσκηση $\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ είναι πρωταρχικό ιδεώδες. (όχι αναγωγο)

Πρόταση Έστω J είναι πρωταρχικό ιδεώδες. Τότε $rad(J) \in Spec(R)$

Απ Έστω $ab \in rad(J)$ κ' έστω ότι $a \notin rad J$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $(ab)^n \in J$

$\Rightarrow a^n b^n \in J$

Αφού $a^n \notin J \Rightarrow$

$b^n \in rad(J) \Rightarrow$

$(b^n)^t \in J \Rightarrow b \in rad(J)$

Πόρισμα

I αναγωγο ιδεώδες, Τότε $rad(I) \in Spec(R)$

Ερώτημα Ισχύει ότι αν $rad(J) \in Spec(R)$ $\Rightarrow J$ πρωταρχικο?

όχι.

Πρόταση J_1, J_2 είναι P-πρωταρχικά Τότε $J_1 \cap J_2$ είναι P-πρωταρχικό ιδεώδες.

Παρατηρηση

$\langle 0 \rangle$ πρωταρχικο :

εστω $ab = 0$, $a \neq 0$

τοτε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$b^n = 0$

Αντιστοιχια

R R/I

$I \trianglelefteq_{\neq} R$

I P-πρωταρχικο

$\langle 0_{R/I} \rangle$ ειναι P/I-πρωταρχ. τοτε

Ορισμος $I \trianglelefteq_{\neq} R$. (6.)

Η αναλυση

$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$

λεγεται απεριττη, ελαχιστη, πρωταρχικη αναλυση του I αν

- Q_i να ειναι πρωταρχικα ιδεωδη
- εστω $\mathrm{rad}(Q_i) = P_i$ $(\in \mathrm{Spec}(R))$

απεριττη : $P_i \neq P_j$ για $i \neq j$

- ελαχιστη : αν $J_i = Q_1 \cap \dots \cap \widehat{Q_i} \cap \dots \cap Q_t$ τοτε $I \subsetneq J_i$ για $i = 1, \dots, t$

Προταση Κάθε R Noether δακτυλιο ιδεωδες του R εχει μια ελαχιστη, απεριττη, πρωταρχικη αναλυση,

Απ

$I \trianglelefteq R$ τοτε I εχει πεπερασμενη αναλυση σε αναγωγα ιδεωδη

Καθε αναγωγο ειναι πρωταρχ.

Αρα καθε ιδεωδες εχει αναλυση σε πρωταρχικα ιδεωδη.

$\implies$ σε ελαχιστη αναλυση ελεγχοντας τους

ορους (7)).

• Ελεγχουμε ριζικα και συνδυαζουμε οποια αναγωγα ιδεωδη χρειαστουν.

■

Ερωτημα

Μοναδικοτητα;

Στον αριθμο των παραγοντων!

(στα P_i ιδεωδη ριζικα των Q_i)

κ στα "ελαχιστα" πρωταρχικα ιδεωδη.

Πρόταση

- Έστω $A \subseteq k^n$. Τότε $\mathbb{V}\mathbb{I}(A) = \overline{A}$.
- Έστω $A \subseteq \mathrm{Spec(R)}$. Τότε $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}\mathbb{I}_R(A) = \overline{A}$.

Πόρισμα

- Αν $A = V$ κλειστό τού k^n (αντιστ. τού $\mathrm{Spec(R)}$) τότε $\mathbb{V}\mathbb{I}(V) = V$ (αντιστ. $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}\mathbb{I}_R(V) = V$).
- Έστω $V_1 \subsetneq V_2$ κλειστά υποσύνολα τού k^n (αντιστ. τού $\mathrm{Spec(R)}$). Τότε $\mathbb{I}(V_2) \subsetneq \mathbb{I}(V_1)$ (αντιστ. $\mathbb{I}_R(V_2) \subsetneq \mathbb{I}_R(V_1)$).

Πράγματι..., αν όχι, τότε $\mathbb{I}(V_2) = \mathbb{I}(V_1) \Rightarrow \overset{V_2}{\underset{\text{αλγεβρ.}}{\mathbb{V}\mathbb{I}(V_2)}} = \overset{V_1}{\underset{\text{αλγεβρ.}}{\mathbb{V}\mathbb{I}(V_1)}}$ $\lightning$

Σημείωση:

Εν γένει, δεν ισχύει αν V_1, V_2 όχι κλειστά: πχ $k = \mathbb{C}$, $V_1 = \mathbb{Z} \subsetneq V_2 = \mathbb{Q}$.

$\overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{I}(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle = \mathbb{I}(\mathbb{Q})$

Nullstellensatz - ξανά!

.

- 1° Έστω $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε $\mathbb{I}\mathbb{V}(I) = \mathrm{Rad}(I)$.
- 2° Έστω $I \trianglelefteq R$. Τότε $\mathbb{I}_R\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(I) = \mathrm{Rad}(I)$.

Σημείωση

Όπου έχουμε $\mathbb{C}$ σε αυτές τις σημειώσεις, μπορείτε να το αντικαταστήσετε με ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k. Το 1ο παραπάνω δεν ισχύει, για μή αλγεβρικά κλειστά σώματα. Για παράδειγμα, αν $I = \langle x^2 + 1 \rangle \subset \mathbb{R}[x]$, τότε … $\mathbb{I}\mathbb{V}(\langle x^2+1 \rangle) = \mathbb{I}(\emptyset) = \mathbb{R}[x]$

πρώτο $\rightarrow$ " $\mathrm{Rad}\langle x^2+1 \rangle$

'Απόδειξη'

1° "$\supseteq$" εύκολη, "$\subseteq$" δύσκολη (NSS)

2° Ταυτολογία!!

Θεώρημα

Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα

$$\{\text{ κλειστά υποσύνολα τού } \mathbb{C}^n/\mathrm{Spec(R)}\} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \{\text{ ριζικά ιδεώση τού } \mathbb{C}[\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n]/\mathrm{R}\}$$

$$V \text{ αλγεβρικό} \xrightarrow{\mathbb{I}} \mathbb{I}(V)$$

$$\mathbb{V}(I) \xleftarrow{\mathbb{V}} I \text{ ριζικό}$$

$$V \xrightarrow{\mathbb{I}} \mathbb{I}(V) \xrightarrow{\mathbb{V}} \mathbb{V}\,\mathbb{I}(V) \overset{\text{αλγ.}}{=} V$$

$$I \xrightarrow{\mathbb{V}} \mathbb{V}(I) \xrightarrow{\mathbb{I}} \mathbb{I}\,\mathbb{V}(I) \overset{NSS}{=} \mathrm{Rad}\, \underset{\text{ριζικό}}{I} = I$$

Ορισμός

Ένας τοπολογικός χώρος $X \neq \emptyset$ λέγεται ανάγωγος αν δεν μπορεί να γραφεί ως μη τετριμμένη ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων του. Με άλλα λόγια, αν $X = V_1 \cup V_2$, με V_1, V_2 κλειστά υποσύνολα τού X, τότε $V_1 = X$ είτε $V_2 = X$.

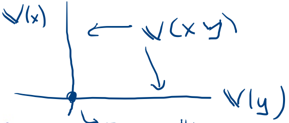
Παράδειγμα

$X = k$ με την τοπολογία Zariski είναι ανάγωγος χώρος (ισχύει το ίδιο για το k^2;) .

$k = V_1 \cup V_2$ ενα εκ των δυο απειρο κλειστο, αρα $= k$

Παράδειγμα

Με την επαγώμενη τοπολογία Zariski, το $\mathbb{V}(xy) = \mathbb{V}(x) \cup \mathbb{V}(y) \subset \mathbb{R}$ όχι ανάγωγο.



Σημείωση

Σέ τοπολογίες Hausdorff δεν έχει και τόσο νόημα ο παραπάνω ορισμός πχ το $[0, 1]$ δεν είναι ανάγωγο με την μετρική τοπολογία!!.

$[0,1] = [0,0.6] \cup [0.5,1]$ τομη "μεγαλη"

Πρόταση

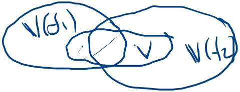
Έστω $V \neq \emptyset$ κλειστό υποσύνολο τού k^n (αντ. $\mathrm{Spec(R)}$). Το V είναι τοπολογικός χώρος με την επαγόμενη τοπολογία Zariski. Τότε το V είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το $\mathbb{I}(V)$ (αντ. $\mathbb{I}_R(V)$) είναι πρώτο ιδεώδες τού $k[x_1, \ldots, x_n]$ (αντ. R).

Σημείωση

Το παραπάνω κριτήριο ισχύει όχι μόνο για κλειστά υποσύνολα, αλλα για οποιοδήποτε $\neq \emptyset$ υποσύνολο τού k^n ή τού $\mathrm{Spec(R)}$.

Αποδειξη για το k^n

$\Rightarrow$ Εστω οτι V αναγωγο & υποθετω οτι το $\mathbb{I}(V)$ οχι πρωτο. Φτανω σε ατοπο! $\exists\, f_1, f_2 \notin \mathbb{I}(V)$ με $f_1 f_2 \in \mathbb{I}(V) \Rightarrow V = \mathbb{V}\,\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{V}(f_1 f_2) = \mathbb{V}(f_1) \cup \mathbb{V}(f_2)$



$\therefore\; V = \underbrace{(V \cap \mathbb{V}(f_1))}_{\neq V\ (*)} \cup \underbrace{(V \cap \mathbb{V}(f_2))}_{\neq V\ (*)}$ διοτι V αναγωγο

(*) αν οχι, $V = V \cap \mathbb{V}(f_1) \Rightarrow V \subseteq \mathbb{V}(f_1) \Rightarrow f_1|_V = 0 \Rightarrow f_1 \in \mathbb{I}(V)$ } ατοπο

Ατοπο

Συνέχεια τής απόδειξης

....

$\Leftarrow$ Εστω $I(V)$ πρωτο, υποθετω οτι V οχι αναγωγο: Θα δειξω ατοπο

$V = V_1 \cup V_2$, $V_i \subsetneq V$ (γνησια) $\Rightarrow I(V) \subsetneq I(V_i)$ αρα παρε

$f_i \in I(V_i) \setminus I(V)$: τοτε $f_1, f_2 \notin I(V)$ ομως

$f_1 f_2 \big|_{V = V_1 \cup V_2} = 0$: $p \in V \Rightarrow p \in V_i$, καποιο i, αρα $f_i(p) = 0$

$\rightarrow f_1 f_2(p) = 0$.

$\Rightarrow f_1 f_2 \in I(V)$, πρωτο: ατοπο.

$\rightarrow$ k^2 ειναι αναγωγο ? $\Rightarrow$ $I(k^2)$ ειναι πρωτο του $k[x,y]$

ασκηση $\rightarrow$ $\| \; ?,?$ $\langle 0 \rangle$ πρωτο