ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2022
Στέφανος Αϊβαζίδης

ΜΕΜ 204 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Επαναληπτικό Φυλλάδιο

Οι ασκήσεις του φυλλαδίου καλύπτουν συνολικά την ύλη μέχρι και το 15ο κεφάλαιο. Οτιδήποτε έχουμε δείξει σε άσκηση του μαθήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Άσκηση 1. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε (επαγωγικά ή αλλιώς) ότι αν $f(m) = m$ για κάποιον φυσικό m, τότε $f(n) = n$ για κάθε $n \leqslant m$.

Άσκηση 2. Να δειχθεί η ακόλουθη μορφή του Αλγορίθμου της Διαίρεσης: αν a, b ακέραιοι με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q, r τέτοιοι ώστε $a = qb + r$ με $-\frac{1}{2}|b| < r \leqslant \frac{1}{2}|b|$.

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι $504 \mid n^9 - n^3$ για κάθε n φυσικό.

Άσκηση 4. Βρείτε τον $\gcd(n! + 1, (n + 1)! + 1)$, όπου n φυσικός.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $|ab - cd| = 1$, τότε $\gcd(a + c, b + d) = 1$.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι καμία δύναμη του 2 δεν γράφεται ως άθροισμα k διαδοχικών φυσικών, όπου $k > 1$.

Άσκηση 7. Να αποδείξετε τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν ο ρητός q είναι τέτοιος ώστε $q^2 \in \mathbb{N}$, τότε ο q είναι ακέραιος.

(ii) Αν για έναν φυσικό k θεωρήσουμε τον $n = k^2 + 1$, τότε ο n^2 δεν είναι της ίδιας μορφής.

Άσκηση 8. Έστω p πρώτος αριθμός.

(i) Αν $p \mid a^n$, να δείξετε ότι $p^n \mid a^n$.

(ii) Αν $\gcd(a, b) = p$, βρείτε τους $\gcd(a^2, b^2)$, $\gcd(a^2, b)$ και $\gcd(a^3, b^2)$.

(iii) Αν $\gcd(a, p^2) = p$ και $\gcd(b, p^3) = p^2$, βρείτε τους $\gcd(ab, p^4)$ και $\gcd(a + b, p^4)$.

Άσκηση 9. Έστω $n > 1$ φυσικός. Ισχύει ότι αν $n \mid ab$, όπου a, b ακέραιοι, τότε

(i) $n \mid \gcd(a, n) \cdot b$;

(ii) $n \mid \gcd(a,n)\cdot\gcd(b,n)$;

Άσκηση 10. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πρώτος της μορφής $3n+1$ είναι της μορφής $6k+1$.

(ii) Κάθε ακέραιος της μορφής $3n+2$, όπου $n \geqslant 1$, έχει έναν πρώτο διαιρέτη της ίδιας μορφής, δηλαδή $p = 3k+2$.

Άσκηση 11. Να δειχθεί ότι ο μοναδικός πρώτος της μορφής $n^3 - 1$ είναι ο 7.

Άσκηση 12. Να δείξετε ότι ο 5 είναι ο μοναδικός πρώτος p για τον οποίο ο $3p+1$ είναι τέλειο τετράγωνο. Είναι επίσης ο μοναδικός πρώτος της μορφής $n^2 - 4$.

Άσκηση 13. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geqslant 2$, ο $n^4 + 4$ είναι σύνθετος.

Άσκηση 14. Να δείξετε ότι κάθε φυσικός $n \geqslant 2$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $n = mk$, όπου ο m είναι τέλειο τετράγωνο και ο k είναι ελεύθερος τετραγώνων.

Άσκηση 15. Να δείξετε ότι αν ο $x > 1$ είναι *πραγματικός* αριθμός, τότε υπάρχει πρώτος στο διάστημα $(x, 2x)$.

Άσκηση 16. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών για να δείξετε ότι ο nοστος πρώτος p_n είναι ασυμπτωτικά ίσος με $n\log n$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1.$$

Άσκηση 17. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι των οποίων τα δύο τελευταία δεκαδικά ψηφία είναι 21;

Άσκηση 18. Να λύσετε τις ακόλουθες ισοτιμίες:

$$36x \equiv 8 \pmod{102}, \qquad 5x \equiv 2 \pmod{26}, \qquad 6x \equiv 15 \pmod{21}.$$

Άσκηση 19. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών ισοτιμιών:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 9 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ 3x \equiv 1 \pmod 4 \\ 4x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$$

Άσκηση 20. Έστω p πρώτος αριθμός και a, b ακέραιοι. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.

(ii) Αν $\gcd(a,p) = \gcd(b,p) = 1$ και $a^p \equiv b^p \pmod p$, τότε $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

Άσκηση 21. Δείξτε ότι οι $645, 1387$ και 1905 είναι όλοι ψευδοπρώτοι.

Άσκηση 22. Δείξτε ότι $18! \equiv -1 \pmod{437}$.

Άσκηση 23. Έστω a, b, c φυσικοί τέτοιοι ώστε $\gcd(a,b,c) = 1$. Ισχύει ότι

$$\sigma(abc) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\,;$$

Άσκηση 24. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $\sigma(n) \in \{10, 16, 19, 22\}$.

Άσκηση 25. Βρείτε τον μικρότερο φυσικό n για τον οποίο ισχύει ότι:

(i) $\tau(n) = 12$.

(ii) $\tau(n) = 24$.

(iii) $\tau(n) = 30$.

Άσκηση 26. Δείξτε ότι αν ο $\sigma(n)$ είναι πρώτος, όπου n φυσικός, τότε ο $\tau(n)$ είναι επίσης πρώτος.

Άσκηση 27. Δείξτε προσεκτικά *όλους* τους ισχυρισμούς που περιέχονται μεταξύ του Ορισμού 14.1.5 και της Εφαρμογής 14.1.6.

Άσκηση 28. Να δειχθούν οι ακόλουθες δύο σχέσεις για κάθε φυσικό n:

(i) $\sum_{d|n} \sigma(d) = \sum_{d|n} (n/d)\tau(d)$.

(ii) $\sum_{d|n} (n/d)\sigma(d) = \sum_{d|n} d\tau(d)$.

Άσκηση 29. Αν η f είναι μία πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, ισχύει ότι η $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, όπου n φυσικός, είναι επίσης πλήρως πολλαπλασιαστική;

Άσκηση 30. Ισχύει ότι για κάθε φυσικό k υπάρχουν άπειροι φυσικοί n τέτοιοι ώστε

$$\mu(n) + \mu(n+1) + \ldots + \mu(n+k) = 0\,;$$