Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Κύρια Σημεία για την Επανάληψη

Να είστε σε θέση να δώσετε παραδείγματα για όλους τους ορισμούς.

(α΄) Αν I ιδεώδες δακτυλίου R, ποια είναι η σχέση (πρώτων, μέγιστων) ιδωδών τού R και τού R/I (με αποδείξεις);

(β΄) Διατύπωση τού Λήμματος τού Zorn. Πού το έχουμε χρησιμοποιήσει;

(γ΄) Να δείξετε ότι $\mathrm{Rad}(I)$ είναι η τομή των πρώτων ιδεωδών που περιέχουν το I.

(δ΄) Ορισμός συστολής και επέκτασης ιδεωδών ως προς εναν ομομορφισμό δακτυλίων. Ποια είναι η σχέση των I^{ec} και J^{ce} με τα I και J αντίστοιχα;

(ε΄) Ορισμός τοπικοποίησης δακτυλίου $S^{-1}R$. Διατύπωση της καθολικής ιδιότητα της τοπικοποίησης. Ποια η αντιστοιχία ιδεωδών τού $S^{-1}R$ και R; Να γνωρίζετε ότι αν $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες τότε ο δακτύλιος $R_{\mathfrak{p}}$ είναι τοπικός δακτύλιος. Αν I είναι ιδεώδες του R να περιγράψετε το $IS^{-1}R \cap R$.

(ϛ΄) Ορισμός αναγώγου ιδεώδους. Απόδειξη ότι τα πρώτα ιδεώδη είναι ανάγωγα.

(ζ΄) Διατύπωση και απόδειξη των τριών ισοδύναμων ορισμών του δακτυλίου της Noether.

(η΄) Απόδειξη του ότι σε δακτύλιο της Noether κάθε γνήσιο ιδεώδες γράφεται ως πεπερασμένη τομή αναγώγων.

(θ΄) Διατύπωση του Θεωρήματος Βάσης του Hilbert.

(ι΄) Διατύπωση του Θεωρήματος Αποφυγής Πρώτων Ιδεωδών.

(ια΄) Ορισμός πρωταρχικού ιδεώδους. Να γνωρίζετε ότι:

1. σε δακτύλιο της Noether τα ανάγωγα ιδεώδη είναι πρωταρχικά
2. I πρωταρχικό ιδεώδες τότε το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι πρώτο.
3. η τομή δύο πρωταρχικών με το ίδιο ριζικό είναι πρωταρχικό ιδεώδες.
4. τι σημαίνει ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση ενός ιδεώδους.
5. σε έναν δακτύλιο τής Noether κάθε ιδεώδες έχει ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση.

(ιβ΄) Αν I ιδεώδες τού R και $a \in R$, τί είναι το ιδεώδες $(I : a)$; Αν $\mathfrak{q}$ είναι $\mathfrak{p}$-πρωταρχικό και $a \notin \mathfrak{q}$, τότε το $(\mathfrak{q} : a)$ είναι $\mathfrak{p}$-πρωταρχικό (με απόδειξη).

(ιγ΄) Τι είναι το σύνολο $\mathrm{Ass}(R/I)$ και ποια η σχέση του με μια ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση του I; Τί καθορίζεται μοναδικά σε μια μια ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση τού I; αν $I \subset P$ ελαχιστοτικά, ποια είναι η ιδιότητα του $IR_P \cap R$;

(ιδ΄) Να μπορείτε να αποδείξετε ότι αν $P \in \mathrm{Spec}(R)$ τότε $P^{(n)} = P^n R_P \cap R$ είναι P-πρωταρχικό και ότι $P^{(n)}R_P = P^n R_P = (PR_P)^n$.

(ιε΄) Αν $Z(R)$ οι διαιρέτες τού μηδενός τού R μαζί με το 0, τότε $Z(R) = \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{AssR}} \mathfrak{p}$ (με απόδειξη).

(ιϛ΄) Αν $\mathrm{Rad}I = \mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες τότε το I είναι πρωταρχικό (με απόδειξη) και άρα τα $\mathfrak{m}^n$ είναι πρωταρχικά ιδεώδη, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ιζ΄) Αν R δακτύλιος τής Noether και I ιδεώδες, τότε τα ελαχιστοτικά στοιχεία τού $\mathrm{Ass}(R/I)$ είναι ακριβώς τα ελαχιστοτικά πρώτα ιδεώδη τού R που περιέχουν το I (με απόδειξη).

(ιη') Ορισμός τού R-module και του π.π. R-module.

(ιθ') Διατύπωση τού Λήμματος NAK και του γενικευμένου Θεωρήματος Cayley - Hamilton. Αποδείξεις για τα επόμενα:

1. αν $M = IM$, όπου $I \subset J(R)$, τότε $M = 0$.
2. αν $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος και $M = N + \mathfrak{m}M$, τότε $M = N$.
3. αν $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος και $M/\mathfrak{m}M = R/\mathfrak{m}\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$, τότε $M = R\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

(κ') Ορισμός ακέραιου στοιχείου επέκτασης δακτυλίων και πότε η επέκταση λέγεται ακέραια. Αποδείξεις για τα επόμενα:

1. αν $R \subset R'$ επέκταση δακτυλίων με το R' να είναι ένα π.π. R-module τότε η επέκταση είναι ακέραια.
2. αν $R \subset R'$ επέκταση δακτυλίων με το R' να είναι μια π.π. R-άλγεβρα τότε η επέκταση είναι ακέραια αν και μονον αν ο R' είναι ένα π.π. R-module.

(κα') Διατύπωση των Θεωρήματων ανάβασης, επικάθισης, μή συγκρισιμότητας κλπ για ακέραιες επεκτάσεις. Απόδειξη του ότι αν $R \subset R'$ ακέραια επέκταση με R, R' ακέραιες περιοχές, τότε R σώμα αν και μόνον R' είναι σώμα.

(κβ') Ορισμοί τής διάστασης Krull ενός δακτυλίου, του ύψους ενός πρώτου ιδεώδους και του ύψους ενός ιδεώδους. Να γνωρίζετε την

1. σχέση τής διάστασης ενός δακτυλίου με το ύψος των πρώτων ιδεωδών τού δακτυλίου.
2. σχέση τής διάστασης ενός τοπικού δακτυλίου με το ύψος τού μέγιστου ιδεώδους του.

(κγ') Απόδειξη τού ότι αν $R \subseteq R'$ ακέραια επέκταση δακτυλίων τότε $\dim R = \dim R'$.

(κδ') Η διάσταση τού πολυωνυμικού δακτυλίου (χωρίς απόδειξη).

(κε') Ορισμός τού δακτυλίου τού Artin. Απόδειξη των

1. αν ένας δακτύλιος τού Artin είναι ακέραια περιοχή τότε είναι σώμα,
2. σε έναν δακτύλιο τού Artin τά πρώτα ιδεώδη είναι μέγιστα και τα τελευταία είναι πεπερασμένου πλήθους.

(κϛ') Να γνωρίζετε τα βασικά θεωρήματα:

1. Σε έναν δακτύλιο τού Artin A με $\mathrm{Spec}A = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k = 0$.
2. Ο A είναι δακτύλιος τού Artin αν και μόνον αν είναι δακτύλιος τής Noether και $\dim A = 0$.

(κζ') Να γνωρίζετε τα βασικά θεωρήματα και να μπορέσετε να δώσετε παραδείγματα για κάθε μία από τις περιπτώσεις:

1. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \mathrm{Spec}(R)$, αν $P^n R_P = 0$, τότε $\mathrm{ht}(P) = 0$.
2. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $x \in R$, τέτοιο ώστε $P \subsetneqq \langle x \rangle \subsetneqq R$ τότε $\mathrm{ht}(P) = 0$ (με απόδειξη).
3. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $x \in R$, τέτοιο ώστε $\langle x \rangle \subset P$ ελαχιστοτικά τότε $\mathrm{ht}(P) \leq 1$.
4. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $\mathrm{ht}(P) = 1$ υπάρχει $x \in R$, τέτοιο ώστε $\langle x \rangle \subset P$ ελαχιστοτικά.

(κη') Να γνωρίζετε τα βασικά θεωρήματα

1. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \operatorname{Spec}(R)$ και $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset P$ ελαχιστοτικά τότε $\operatorname{ht}(P) \leq n$.
2. Σε έναν δακτύλιο της Noether R με $P \in \operatorname{Spec}(R)$ και $\operatorname{ht}(P) = n$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in R$, τέτοια ώστε $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset P$ ελαχιστοτικά.

(κθ΄) Να μπορείτε να αποδείξετε ότι αν $(R, \mathfrak{m})$ είναι τοπικός δακτύλιος της Noether, τότε $\dim(R) < \infty$.

(λ΄) Απόδειξη τού ότι τομές και πεπερασμένες ενώσεις αλγεβρικών συνόλων είναι αλγεβρικά. Ποιά είναι τα αλγεβρικά υποσύνολα του k (με απόδειξη).

(λα΄) Διατύπωση τού NSS. Απόδειξη των:

1. $\operatorname{Rad}(I) \subseteq \mathbb{IV}(I)$.
2. Αν $V_1 \subsetneq V_2$ αλγεβρικά τότε $\mathbb{I}(V_2) \subsetneq \mathbb{I}(V_2)$.
3. Αν k αλγεβρικά κλειστό και I_1, I_2 ριζικά ιδέωδη, τότε $I_1 \subsetneq I_2$ συνεπάγεται $\mathbb{V}(I_2) \subsetneq \mathbb{V}(I_1)$.
4. Αντιπαράδειγμα: Αν k όχι αλγεβρικά κλειστό το τελευταίο, εν γένει, δεν ισχύει.

(λβ΄) Η τοπολογία Zariski τού k^n και τού $\operatorname{Spec}R$ - ποιά είναι τα κλειστά υποσύνολα. Ποιά είναι η αλγεβρική θήκη ενός υποσυνόλου τού k^n ή τού $\operatorname{Spec}R$.

(λγ΄) Τί είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο; Απόδειξη τού ότι ένα αλγεβρικό σύνολο V είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το $\mathbb{I}(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες. Αν k αλγεβρικά κλειστό, ποιά είναι η αντιστοιχία μεταξύ αλγεβρικών συνόλων (ανάγωγων, σημείων τού k^n) και ιδεωδών τού $k[x_1, \ldots, x_n]$;

(λδ΄) Απόδειξη τού ότι κάθε κλειστό υποσύνολο τού k^n ή τού $\operatorname{Spec}(R)$, όπου R δακτύλιος της Noether, διασπάται σε άθροισμα αναγώγων συνιστωσών. Πώς αυτό συνεπάγεται ότι κάθε ιδεώδες I τού R περιέχεται σε πεπερασμένων πλήθος ελαχιστοτικών πρώτων ιδεωδών; Ποια είναι η σχέση τών ελαχιστοτικών στοιχείων τού $\operatorname{Ass}(R/I)$ με τη διάσπαση τού $\mathbb{V}_{\operatorname{Spec}(R)}(I)$ σε ανάγωγες συνιστώσες;

(λε΄) Πώς ορίζεται ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[V]$ ενός αλγεβρικού συνόλου V. Τί είναι μορφισμός $\phi : V \to W$ μεταξύ αλγεβρικών συνόλων. Ποιός είναι ο επαγώμενος ομομορφισμός k-αλγεβρών $\tilde{\phi} : k[W] \to k[V]$ (με απόδειξη ότι είναι ομομορφισμός); Αντίστροφα, δοσμένου μορφισμός k-αλγεβρών $\tilde{\phi} : k[W] \to k[V]$ πώς αυτός επάγει μορφισμό $\phi : V \to W$ μεταξύ των αλγεβρικών συνόλων V και W; Πότε δύο αλγεβρικά σύνολα λέγονται ισόμορφα;

(λϛ΄) Γεωμετρικές ιδιότητες τού μορφισμού αλγεβρικών συνόλων $\phi : V \to W$ στην περίπτωση που $\tilde{\phi} : k[W] \hookrightarrow k[V]$ είναι εμβύθιση με το $k[V]$ ακέραιο πάνω από το $k[W]$.

(λζ΄) Ορισμός τής διάστασης ενός τοπολογικού χώρου. Αν k αλγεβρικά κλειστό και $V \subset k^n$ αλγεβρικό σύνολο (με την τοπολογία Zariski), απόδειξη των ότι :

1. $\dim V < \infty$.
2. $\dim V = \dim k[V]$.
3. Αν $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ η διάσπαση σε ανάγωγες συνιστώσες, τότε $\dim V = \max_i \{\dim V_i\}$.

(λη΄) Αν k αλγεβρικά κλειστό, και $W \subset V \subset k^n$ αλγεβρικά με W ανάγωγο, πώς ορίζεται η συνδιάσταση $\operatorname{codim}_V W$ τού W στο V. Αν τό W όχι ανάγωγο πώς όρίζεται η $\operatorname{codim}_V W$; Απόδειξη των

1. $\operatorname{codim}_V W = \operatorname{ht}(\mathbb{I}(W))$, με $\mathbb{I}(W)$ ιδεώδες στον $k[V]$.
2. $\operatorname{codim}_{k^n}\{p\} = n$.
3. Αν $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ η διάσπαση σε ανάγωγες συνιστώσες και $f \in k[V]$ με $f \notin \mathbb{I}(V_1)$, τότε $\operatorname{codim}_{V_1} W_1 = 1$, όπου $W_1 = \mathbb{V}(f) \cap V_1$.