R δακτ. Noether

Πρόταση Αν $P \in Spec(R)$ και $\exists$ x τ.ω. $\langle x \rangle \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P$, τότε $ht P \leq 1$

---

* Αν $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$, τότε ο αριθμός των πρώτων ιδεωδών του R που "καθονται" πάνω από το ελαχιστοτικά πάνω από το I είναι πεπερασμένος και τα πρώτα αυτά ιδεώδη ανήκουν στο $Ass(R/I)$

$I = Q_1 \cap \dots \cap Q_\ell$ ε.π.α.α,

Q_i είναι P_i-πρωταρχ.

$\# Ass(R/I) = \{P_1, \dots, P_\ell\}$,

Πόρισμα

Αν $x \notin U(R)$, τότε $ht(\langle x \rangle) \leq 1$. Αν το x δεν περιέχεται στα ελαχιστοτικά πρώτα ιδεώδη του R τότε $ht(\langle x \rangle) = 1$

<u>Απ</u>

$ht(\langle x \rangle) = \inf(ht(P) : \langle x \rangle \underset{\text{ελαχ.}}{\subset} P, P \in Spec(R))$

Αν $x \notin$ ελαχιστ. πρώτο ιδεώδες, τότε αν $\langle x \rangle \underset{\text{ελαχιστ}}{\subset} P \Rightarrow ht(P) \neq 0 \Rightarrow ht(P) = 1$

$ht(P) = 0 \Leftrightarrow P$ ελαχιστ. πρώτο ιδεώδες

$P \in Spec(R)$

---

* Αν $\overset{x \neq 0}{x} \notin Z(R)$ τότε πχ $x \notin P$, όπου P ελαχιστ. πρώτο ιδεώδες

Θεωρημα A R δακτ Noether $P \in Spec(R)$.

Αν $ht(P) = 1 \Longrightarrow \exists\, x \in P$

τ.ω. $\langle x \rangle \underset{\text{ελαχιστ}}{\subset} P$.

ΑΠ

Εστω $P_1, \dots, P_t$ τα ελαχιστοτικα πρωτα ιδεωδη του R ($ht(P_i) = 0$ $i = 1, \dots, t$)

Αφου $ht(P) = 1 \Longrightarrow$

$P \neq P_1, \dots, P_t$ και βεβαια

$P \not\subset P_i$ $i = 1, \dots, t$

Απο Θεωρ. Αποφ. Πρωτ. Ιδεωδ.

$\Longrightarrow P \not\subset P_1 \cup \dots \cup P_t$

$\Longrightarrow \exists\, x \in P,\ x \notin P_1 \cup \dots \cup P_t$

δηλ $\exists\, x \in P,\ x \notin P_i$ $i = 1, \dots, t$

Επομενως:

$\langle x \rangle \subset P$ (αφου $x \in P$)

ελαχιστοτικός

διαφορετικά $\exists\, P' \in Spec(R)$

τ.ω.

$\langle x \rangle \subset P' \subsetneq P$

Αυτο θα σημαινε

$ht(P') < ht(P) = 1 \Longrightarrow$

$ht(P') = 0 \Longrightarrow P' = P_i$

για $i = 1, \dots, t$

$\rightarrow\leftarrow$

$\blacksquare$

ΘΜ R δακτ. Noether.

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset P$ ελαχιστ.

οπου $P \in Spec(R)$.
Τοτε $ht(P) \leq n$.

Απ

Επαγωγη $n = 1$ ✓
θεωρουμε προταση αληθης $n-1$
θα την δειξουμε για n.

• Αν $ht(P) = 0$ ✓

• Διαφορετικα $\exists\ P' \subsetneq P$.
Αρκει να δειξουμε οτι
$ht\ P' \leq n-1$
As επιλεξουμε P' μεγιστο με την ιδιοτητα $P' \subsetneq P$
Τοπικοποιουμε
Υποθετουμε λοιπον οτι
P μεγιστο ιδεωδες.

$I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. ③

Αρα $rad(I) = P$ και
$Ass(R/I) = \{P\}$ και
αρα
$P^t \subset I$

Αφου $I \not\subset P' \Rightarrow \exists\ i$ τω
$x_i \notin P'$. As υποθεσουμε
Χ.Β.Γ οτι $x_1 \notin P'$

$P' + \langle x_1 \rangle \subset P$ ελαχιστοτικος $\Rightarrow$
$rad(P' + \langle x_1 \rangle) = P$
Αρα $P^m \subset P' + \langle x_1 \rangle$
για $m \in \mathbb{N}$

Αφου $x_i \in P \Rightarrow$

$x_i^m \in P' + \langle x_1 \rangle \Rightarrow$

$x_i^m = b_i + x_1 \cdot r_1$, οπου
$b_i \in P'$, $r_i \in R$

$i=2,\dots,n$.

Εστω

$J=\langle b_2,\dots,b_n\rangle$

(Θα δειξουμε οτι $J\subset P'$ αρα υποδ. ελαχιστοτικα επαγωγης $ht(P')\le n-1$)

R/J θα μελετησουμε το κυριο ιδεωδες

$\langle \bar{x}_1\rangle = \dfrac{\langle x_1,b_2,\dots,b_n\rangle}{J}$

x_1+J

$\langle x_1,b_2,\dots,b_n\rangle \overset{\text{ασκηση}}{=} \langle x_1,x_2^m,\dots,x_n^m\rangle$

④

Αφου

$\langle x_1,\dots,x_n\rangle \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P \overset{\text{ασκηση}}{\Longrightarrow}$

$\langle x_1,x_2^m,\dots,x_n^m\rangle \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P$

Επομενως στον R/J ισχυει οτι

$\langle \bar{x}_1\rangle \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P/J$

Απο την προταση μας

$\Longrightarrow ht(P/J)\le 1$.

Αφου $P'/J\in Spec(R/J)$ και $P'/J \subsetneq P/J$

Αρα

$ht(P'/J) = 0 \Rightarrow$

$J \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P' \Rightarrow$

$\langle b_2, \ldots, b_n \rangle$

$ht(P') \leq n-1$

$\Rightarrow ht(P) \leq n$ ∎

<u>Θεωρημα</u>

Αν $ht(P)=n$ τοτε $\exists$ $x_1, \ldots, x_n$ τ.ω $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \underset{\text{ελαχιστ.}}{\subset} P$

<u>Απ</u>

επαγωγη στο n

επαγ. υποθ.

$\exists$ πρωτη ακολουθια $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subsetneq P_n = P$

Απο υποθ. επαγ.

$\exists$ $x_1, \ldots, x_{n-1} \in P_{n-1}$ τ.ω

$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \underset{\text{ελαχιστ}}{\subset} P_{n-1}$

Εστω $I = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$

Τοτε στον R/I

$ht(P/I) = 1$ (γιατι?)

Αρα απο θεωρημα Α, $\exists$ $\bar{x}_n$ τ.ω. $\langle \bar{x}_n \rangle \underset{\text{ελαχ}}{\subset} P/I \Rightarrow$

$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \underset{\text{ελαχ}}{\subset} P$ ∎

<u>k = αλγ. κλειστό</u>: $W \subseteq V$ αλγεβρικά ορίζουμε $\mathrm{codim}_V W$ (συνδιάσταση του W στο V)

↳ ανάγωγο

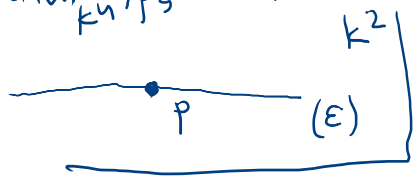
ως το $\sup \{ n$ τ.ω. $\exists !\ W \subseteq Y_0 \subsetneq \cdots \subseteq Y_n \subseteq V \}$.

↳ ανάγωγα αλγεβρικά

$\rightarrow \mathrm{codim}_V W \leq \dim V < \infty$.

<u>π.χ.</u> $W = \{p\} \subseteq k^n$ $\mathrm{codim}_{k^n}\{p\} = n$,

$n = 2$:



$\{p\} = Y_0 \subsetneq (\varepsilon) = Y_1 \subsetneq k^2 = Y_2$

άρα $\left.\begin{array}{l} \mathrm{codim}_{k^2}\{p\} \geq 2 \\ \quad\wedge| \\ \dim k^2 = 2. \end{array}\right\} = 2.$

$p = (1,1)$, $(\varepsilon): x = 1$, k^2.

<u>Πρόταση</u>. Έστω $W \subseteq V$ αλγεβρικά. Τότε $\mathrm{codim}_V W = ht(I(W))$, $I(W) \trianglelefteq k[V]$

↳ ανάγωγο ↳ πρώτο

Απόδειξη: $\begin{matrix} V \\ \cup\!| \\ W \end{matrix} \longleftrightarrow I(W) \trianglelefteq k[V]$.

$V \longleftrightarrow \langle 0 \rangle \trianglelefteq k[V]$.

$$W \subseteq Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq V \xleftrightarrow{1-1} (Y_i \text{ αλγεβρικά ανάγωγα})$$

στο $k[V]$: $\left(\langle 0 \rangle \subseteq \right) I(Y_n) \subsetneq \cdots \subsetneq I(Y_0) \subseteq I(W)$ αλυσίδα πρώτων ιδεωδών στο $I(W)$ = πρώτο

Σημ.: Αν θέλουμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό για $W \subseteq V$ αλγεβρικά (οποιαδήποτε) έτσι ώστε $\operatorname{codim}_V W = \operatorname{ht}(\underbrace{I(W)}_{\text{όχι, εν γένει, πρώτο}})$ στο $k[V]$, ο κατάλληλος ορισμός είναι ο εξής:

$W = W_1 \cup \cdots \cup W_r$ διάσπαση σε ανάγωγες συνιστώσες

ελαχιστικά πρώτα που περιέχουν το $I(W)$ $\rightarrow$ $P_1 \quad \ldots \quad P_r$

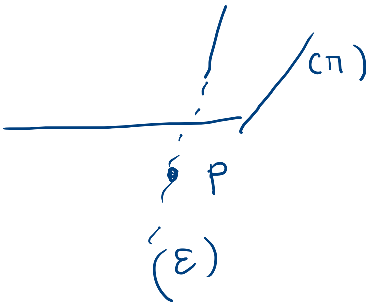
ΟΡΙΣΜΟΣ: $\operatorname{codim}_V W = \min\{\operatorname{codim}_V W_i\}$.

Σημ.: Αν $W \subseteq V$ αλγεβρικά $(\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(W))$ τότε

$$k[W] \cong k[V]/\mathbb{I}(W) \quad \text{(δείτε το!)}$$

Ερώτημα: Έστω $W \subseteq V$ αλγεβρικά, ι-ανάγωγα. Ισχύει ότι $\dim W + \operatorname{codim}_V W = \dim V$?

ΟΧΙ: $V = (\varepsilon) \cup (\Pi)$, $W = \{p\}$ $(p \in (\varepsilon))$.



• $\dim V = \dim(\Pi) = 2$.

$\operatorname{codim}_V \{p\}$: $\{p\} = Y_0 \subsetneq (\varepsilon) = Y_1 \subseteq V$

άρα $\operatorname{codim}_V \{p\} = 1$.

Επίσης $\dim\{p\} = 0$.

$0 + 1 < 2$

Σ

→ <u>Πρόταση</u>: $W \subseteq V$ αλγεβρικά: $\dim V \geq \dim W + \operatorname{codim}_V W$.
↳ ανάγωγα. (*)

Απόδειξη εύκολη!

Αλγεβρικό αντίστοιχο: $\dim V = \dim k[V]$.

$\dim W = \dim k[W] = \dim k[V]/I(W)$

$\operatorname{codim}_V W = ht(I(W))$ όπου $k[V]$ Noether.

→ Αν $\dim R = n$, R δακτύλιος, $p \in \operatorname{Spec} R$ } τότε: $\dim R \geq \dim k[V]/p + ht(p)$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $W \subseteq V$ <u>ανάγωγα</u> <u>αλγεβρικά</u> τότε ισχύει $\stackrel{!!}{=}$ ισότητα (*)

Ειδαμε το ΘΕΩΡΗΜΑ: $a \neq 0$, $\langle a \rangle \subseteq \underset{\text{↳ ελαχιστα}}{p} \Rightarrow ht(p) \leq 1 \Rightarrow ht(\langle a \rangle) \leq 1$.

Ερωτημα: περιπτωσεις που εχω "$=$"? Εστω R α.π., $\langle a \rangle \subseteq \underset{\text{↳ ελαχιστα}}{p}$, $a \neq 0$

$\Rightarrow ht(p) = 1$: $\exists$: $\langle 0 \rangle \subsetneq \underset{\text{↳ πρωτο}}{p} \Rightarrow ht(p) \geq 1$, ομως ≤ 1 (απο το Θεωρημα), αρα $ht(p) = 1$

$\Rightarrow ht(\langle a \rangle) = 1$.

Σημ.: $f \in k[x_1, .., x_n] \rightsquigarrow V(f) = \{a \in k^n,\ f(a) = 0\} \subseteq k^n$.

$V \subseteq k^n$ αλγεβρ. $f \in k[V] \rightsquigarrow V_V(f) := \{a \in V,\ f(a) = 0\} \subseteq V$

$$V_V(f) = \underset{\substack{\cap \\ k^n}}{V(f)} \cap \underset{\substack{\cap \\ k^n}}{V}$$

$W \subseteq V \qquad f \in k[V] \qquad \mathbb{V}(f) = \{a \in V,\ f(a) = 0\} \subseteq V$

$$\begin{array}{c} f \in k[V] \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \bar{f} \in k[W] = k[V]/\mathbb{I}(W) \end{array} \qquad \mathbb{V}(\bar{f}) = \{\underset{\substack{\cap| \\ W}}{a \in W,\ f(a)}\} = \underset{\substack{V \\ \cup|}}{\mathbb{V}(f)} \cap \underset{\substack{V \\ \cup|}}{W}$$

<u>Εφαρμογή</u>. Έστω $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ διάσπαση σε αναγωγα-

$ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow$

$ P_1 \qquad\quad P_r$ ελαχιστοτικά στο $k[V]$.

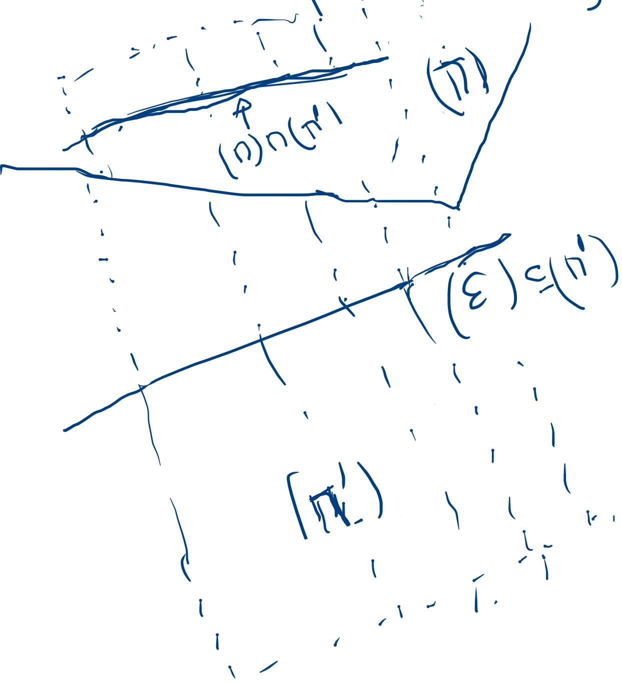
Έστω $f \in k[V]$, με $f \notin P_1$ $\Big(\underset{\substack{\| \\ V_1}}{\mathbb{V}(P_1)} \not\subseteq \mathbb{V}(f)\Big)$. Τότε $W_1 = \mathbb{V}(f) \cap V_1 \subsetneq V_1$

$\Rightarrow \operatorname{codim}_{V_1} W_1 = 1$: Παρατήρηση $k[V_1] = k[V]/P_1$ α.π.

$0 \neq \bar{f} \in k[V]/P_1 \Rightarrow ht\langle \bar{f}\rangle = 1 \Rightarrow \operatorname{codim}_{V_1} W_1 = 1$.

$W_1 = \mathbb{V}(\bar{f}) \subseteq V_1$

$V = (\varepsilon) \cup (\Pi)$



$W = (\Pi')$ st $(\varepsilon) \subseteq (\Pi')$, $(\Pi) \nsubseteq (\Pi')$

$\operatorname{codim}_{\Pi} \Pi \cap \Pi' = 1$

$\operatorname{codim}_{(\varepsilon)} \underbrace{(\varepsilon) \cap (\Pi')}_{= (\varepsilon)} = 0$