<u>Artinian Δακτύλιοι</u>: R Artinian αν ισχύει ένα από τα ισοδύναμα:

- κάθε φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ γίνεται στατική
- κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών έχει ελαχιστικά στοιχεία.

• <u>Λήμμα</u> Έστω M ένα R-module, $N \underset{\text{submod}}{\leq} M$. Τότε

M Nötherian (Artinian) R-module $\Leftrightarrow$ N, M/N είναι Nötherian (Artinian) R-modules.

<u>π.χ.</u> Έστω V δ.χ. πάνω από σώμα k ($= k$-module):

- $\dim_k V = n < \infty$ τότε V Artinian + Nötherian k-module
- $\dim_k V = \infty$ τότε όχι Nötherian + όχι Artinian

π.χ. $R = k[x]$ όχι Artinian : $\langle x \rangle \supsetneq \langle x^2 \rangle \supsetneq \cdots\cdots$

$S = k[x]/\langle x^2 \rangle$ Artinian

$\uparrow$ ιδεώδη

· ιδεώδη $\langle f(x) \rangle$ του $k[x]$ με $\langle x^2 \rangle \subseteq \langle f(x) \rangle$

$\Rightarrow f(x) \mid x^2 \Rightarrow f(x) = c,\ cx,\ cx^2$ άρα

Σκοπός

Τα ιδεώδη του S : $\langle \bar{1} \rangle$, $\langle \bar{x} \rangle$, $\langle \bar{x}^2 \rangle = \langle \bar{0} \rangle$

ΘΕΩΡΗΜΑ: R Artinian $\Leftrightarrow$ R Nöetherian και $\dim R = 0$.

Σημείωση Έστω R Artinian που είναι α.π. Τότε R = σώμα!

Έστω $a \neq 0 \in R$: $\langle a \rangle \supseteq \langle a^2 \rangle \supseteq \cdots\cdots$ γίνεται στατική-άρα $\exists\ n \in \mathbb{N}$ με $\langle a^n \rangle = \langle a^{n+1} \rangle \Rightarrow a^n \in \langle a^{n+1} \rangle$

$$\Rightarrow a^n = r a^{n+1} \Rightarrow \underbrace{a^n}_{\neq 0}(ra-1) = 0 \xRightarrow{\alpha.\pi.} ra-1=0$$

δηλ. $ra=1$, r αντιστρέψιμο.

<u>Πρόταση</u> Έστω R δακτύλιος Artin, τότε όλα τα πρώτα ιδεώδη είναι μέγιστα και τα τελευταία είναι πεπερασμένου πλήθους.

<u>Απόδ.</u> • Έστω p πρώτο ιδεώδες, τότε A/p είναι Artinian α.π. άρα σώμα $\Rightarrow p$ μέγιστο.

• Πεπ.

$$\Omega \neq \emptyset \quad \Omega = \{ m_1 \cap \dots \cap m_s ,\ s \in \mathbb{N},\ m_i \text{ μέγιστα ιδεώδη} \}.$$

Έστω $\eta = m_1 \cap \dots \cap m_r$ ελάχιστο στοιχείο του Ω.

Έστω m μέγιστο του R: τότε $m \cap \eta \in \Omega$, $m \cap \eta \subseteq \eta \xRightarrow{\eta\text{-ελάχιστο άρα } =} \eta \subseteq m$

$$\Rightarrow m_1 \cap \dots \cap m_r \subseteq m \xRightarrow{\exists i \in \{1,\dots,r\}} m_i \subseteq m \xRightarrow{m,\, m_i \text{ μέγιστα}} \boxed{m = m_i}.\ \checkmark$$

Πρόταση Έστω R δακτύλιος του Artin, $\operatorname{Spec} R = \{m_1, \dots, m_n\}$, m_i = μέγιστο

Τότε $\exists\, k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $(m_1 \cdots m_n)^k = 0$. $\left(\overset{\Leftrightarrow}{\exists}\, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ με $m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n} = 0 \right)$

Απόδειξη. Παίρνε $\underset{\neq \emptyset}{\Omega} = \{ m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n} ,\ \underset{\text{όχι όλα } 0}{k_i \overset{\in \mathbb{Z}}{\geq} 0} \}$.

Παίρνε I ελάχιστο στοιχείο του Ω.

- $I = m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ (όχι όλα 0)
- $I^2 \in \Omega$, $I^2 \subseteq I \xRightarrow[I \text{ ελαχ.}]{} I^2 = I$
- Αν $m = m_i$ μέγιστο ιδεώδες του R τότε $I \subseteq m$: $mI \in \Omega$, $mI \subseteq I$ $\xRightarrow[I \text{ ελαχ}]{} I = mI \subseteq m$.

Δείχνουμε με εις άτοπο ότι $I = 0$ (οπότε τέλος!). Αν όχι το παίρνε το σύνολο:

$S = \{ J$ ιδεώδες με $I \cdot J \neq 0 \}$.

$\to S \neq \emptyset$ διότι $I^2 = I \neq 0$ άρα $I \in S$.

Έστω J_0 ελάχιστο στοιχείο του S.

- J_0 είναι κύριο ιδεώδες: $\exists\, b \in J$ με $I \langle b \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle b \rangle \in S$
  Έχω $\langle b \rangle \subseteq J_0 \xRightarrow{J_0 \text{ ελάχ.}} J_0 = \langle b \rangle$.

- $I J_0 = J_0$: $I J_0 \subseteq J_0$ και $I \cdot I J_0 = I^2 J_0 \overset{I^2 = I}{=} I J_0 \neq 0$
  $\Rightarrow I J_0 \in S \xRightarrow{J_0 \text{ ελάχ.}} I J_0 = J_0$

Από NAK, $\exists\, a \in I$ με $(1-a) J_0 = 0$. Το $1-a$ όχι αντιστρέψιμο(*) άρα $\langle 1-a \rangle \subseteq m$ ↳ μέγιστο του R. άρα
$1 = \underset{m}{\underset{\cap}{(1-a)}} + a \in I \subseteq m \Rightarrow 1 \in m$. άτοπο.

(*) διαφορετικά $J_0 = 0$ άτοπο διότι $I J_0 \neq 0$

<u>Αποδ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ</u> : "⇐" Έστω R δακτύλιος Artin. Τότε έχουμε δει ότι κάθε πρώτο είναι μέγιστο και μάλιστα $\operatorname{Spec}R = \{m_1, \dots, m_n\}$.

Δείχνουμε ότι είναι Nötherian. Από την παραπάνω πρόταση $\exists\, k \in \mathbb{N}$ με $(m_1 \cdots m_n)^k = 0$, το οποίο το γράφω (με επαναλήψεις) ως $\tilde{m}_1 \cdots \tilde{m}_N = 0$ ($N = kn$) (όπου το $\tilde{m}_j$ είναι κάποιο m_i)

Ορίζουμε $Q_i = \tilde{m}_{i+1} \cdots \tilde{m}_N$, $i = 0, \dots, N-1$. Άρα $Q_0 = 0$

Έχω $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_{N-1} \subseteq Q_N = R$

Από λήμμα Q_i Artinian R-modules, $Q_i / Q_{i-1} = Q_i / \tilde{m}_i Q_i$ είναι Artinian R-modules

Το $Q_i / \tilde{m}_i Q_i$ είναι και $\underset{\text{σώμα}}{\underbrace{R/\tilde{m}_i}}$-module (το έχουμε δει)

Τα R-submodules του $Q_i / \tilde{m}_i Q_i$ είναι τα ίδια με τα $R/\tilde{m}_i$-submodules του άρα $Q_i/\tilde{m}_j Q_i$ είναι Artinian, $R/\tilde{m}_j = k$ (σώμα) -module

άρα $\dim_k Q_i/\tilde{m}_j Q_i < \infty \Rightarrow Q_i/\tilde{m}_j Q_i = Q_{i-1}$ Nötherian.

$i=1$: $Q_1/0 = Q_{i-1} = Q_1$ είναι Nötherian R-module

Με επαγωγή στο i δείχνουμε ότι όλα τα Q_i είναι Nötherian R-module
(χρήση πεπερασμένων λήμματος: π.χ. $i=2$: Q_2/Q_1, Q_1 Nötherian $\Rightarrow Q_2$ Nöth.)

$\Leftarrow$ Έστω R δακτύλιος Nöther και $\dim R = 0$. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι Artin. Τότε θα βρούμε ένα πρώτο ιδεώδες p του R που δεν είναι μέγιστο· άτοπο διότι $\dim R = 0$!

από υπόθεση

Παίρνε $\underset{\neq\emptyset}{\Omega} = \{ I$ ιδεώδη του R με R/I όχι Artinian$\} \ni \langle 0 \rangle$

Έστω P μέγιστο των Ω. Επιπλ. P όχι μέγιστο ιδεώδες του R/P ωστε $\underset{\text{Artinian}}{\overset{?}{=}}$ Δείχνω όμως ότι P πρώτο-

Πάρε $S = R/P$; δείχνω ότι $S =$ α.π. Πάρε $0 \neq a \in S$, δείχνω ότι δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.

Ορίζω $\varphi_a : S \longrightarrow S$, $s \longmapsto sa$ S-module ομομ.

$\operatorname{Im}\varphi_a = \langle a \rangle$, $\ker\varphi_a = \{ s \text{ με } sa = 0 \} =: \operatorname{Ann}(a)$

(σημ: $\operatorname{Ann}(a) = \langle 0 \rangle \iff$ το a δεν έχει μηδενοδιαιρέτες)

$$S/\operatorname{Ann}\langle a \rangle \cong \operatorname{Im}\varphi_a = \langle a \rangle .$$

S όχι Artinian $\Longrightarrow$ $\langle a \rangle \cong S/\operatorname{Ann}\langle a \rangle$ ή $S/\langle a \rangle$ όχι Artinian S-module

Σημ. Αν I ιδεώδες του $S = R/P$ τότε το : $\left(R \xrightarrow{\pi} S = R/P \right)$

$I \xleftrightarrow{1-1}$ ιδεώδη $\pi^{-1}(I)$ του R που περιέχει το P.

και $S/I \cong R/\pi^{-1}(I)$

Άρα S/I δεν είναι Artinian $\Leftrightarrow$ $I = \langle 0 \rangle$ του S. (λόγω μεγιστότητας του P)

διότι διαφορετικά $P \subsetneqq \pi^{-1}(I)$ και τότε $R/\pi^{-1}(I) \cong S/I$ Artinian.

Επομένως, είτε $\mathrm{Ann}(a) = \langle 0 \rangle$ είτε $\langle a \rangle = 0$ (όχι διότι $a \neq 0$)

άρα $\mathrm{Ann}(a) = \langle 0 \rangle$ δηλ. a δεν έχει μηδενοδιαιρέτη

Οπότε $R/P = S$ α.π.

Στοχος για τη Πεμπτη.

• Αν $\exists\ x$
(R δ. Noether) και
$P \in Spec(R)$ τ.ω.
$\langle x \rangle \underset{\text{ελαχιστοτικα}}{\subset} P$
τοτε $ht(P) \leq 1$

και αντιστροφα $P \in Spec(R)$
αν $ht(P) = 1$ τοτε
$\exists\ x \in P$ τ.ω.
$\langle x \rangle \underset{\text{ελαχιστοτ}}{\subset} P$

και βεβαια γενικευση
για $ht(P) = n$
Krull principal Ideal Theorem.

R δ. Noether

Λημμα 1

Εστω $Q \in Spec(R)$ και

$$Q^{(n)} = Q^n R_Q \cap R$$

(n-στη συμβολικη δυναμη του Q)

Τοτε $Q^{(n)}$ ειναι Q-πρωταρχικο ιδεωδες.

Απ

• $rad(Q^{(n)}) = Q$

"$\subset$"

$f \in rad(Q^{(n)})$. Αρα
$f^m \in Q^{(n)}$ $m \in \mathbb{N}$
αρα $\frac{f^m}{1} \in Q^n R_Q \Longrightarrow$
$\exists\ u \notin Q$ τ.ω. $f^m u \in Q^n$
$\Longrightarrow$

$f^m \cdot u \in Q$ και $u \notin Q$ $\}\xRightarrow{Q \text{ πρωτο}} f^m \in Q$
$\Rightarrow f \in Q$

"$\supset$" (αδυναση).

- $Q^{(n)}$ Q-πρωταρχικο.

Εστω $fg \in Q^{(n)}$ και
εστω οτι $g \notin rad(Q^{(n)})$
τοτε Π.Ν.Δ.Ο $f \in Q^{(n)}$
Πραγματι!
$\underline{g \notin Q} \;(= rad(Q^{(n)}))$
τοτε $\underline{gf} \in Q^{(n)}$
$\Rightarrow \exists\ \underline{u \notin Q}$ τ.ω. $ugf \in Q^n$
ομως $(ug) \notin Q$

αφου
$(ug) f \in Q^n \Rightarrow$
$f \in Q^{(n)}$.

~~$\times\times\times$~~

$I R_Q \cap R =$
$\{ r : \exists\ u \notin Q$ τ.ω. $ur \in I \}$

Λημμα 2:
Εστω $A \triangleleft R$, $P_1, \dots, P_n \in Spec(R)$.
Αν $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_n$
Τοτε $A \subset P_i$ για καποιο i