Πρόταση Zariski: $k \subseteq L$ σώματα, $L =$ π.π. k-άλγεβρα. Τότε η επέκταση $k \subseteq L$ είναι ακέραια.

Αποδ. Από Nöther normalization

$$\underbrace{k[z_1, \dots, z_N]}_{\substack{\| (*) \\ k}} \subseteq L$$

↳ π.π. ως module (ακέραια επέκταση)

Άρα $k[z_1, .., z_N]$ σώμα $\Rightarrow N = 0$ και $k[z_1, .., z_N] = k$. (*)

↗ ή αλγ. κλειστό σώμα

Πόρισμα Αν $k = \mathbb{C}$ τότε $L = k$.

Αποδ. Έστω $a \in L$ τότε $f(a) = 0$ για κάποιο (μονικό) $f(x) \in k[x]$

$\xRightarrow{k = \mathbb{C}}$ $a \in k$. Άρα $L = k$.

Weak NSS: Έστω $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \Rightarrow \mathbb{V}(I) \neq \phi$.

↳ ή αλγεβρικά κλειστό σώμα.

γνήσιο ιδεώδες

Αποδ. $I \subseteq m$ ↳ μέγιστο. Αρκεί να δείξω ότι $\mathbb{V}(m) \neq \phi$ $(\mathbb{V}(m) \subseteq \mathbb{V}(I))$

$$\mathbb{C} \xhookrightarrow{i} \underbrace{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/m}_{\text{σώμα}} = \mathbb{C}[\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}]$$

Από το Πόρισμα: i είναι ισομορφισμός.

Άρα $\overline{x_i} = \overline{c_i}$, $c_i \in \mathbb{C}$ $\forall i \Rightarrow x_i - c_i \in m$, $\forall i$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n \rangle}_{= \mathbb{I}(p) \text{ μέγιστο}} \subseteq m \quad \left.\right\} \quad m = \mathbb{I}(p)$$

$p = (c_1,\dots,c_n)$

άρα $\mathbb{V}(m) = \{p\} \neq \phi$.

NSS: Αν $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,..,x_n] \Rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \operatorname{Rad} I$.

Απόδειξη: "$\supseteq$" την έχουμε δει.

"$\subseteq$" Αν $I = \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$ τότε ok. Έστω $I \subsetneq \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$.

Από το Hilbert basis thm: $I = \langle f_1,.., f_n \rangle$, $f_i \in \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$

Έστω $g \neq 0 \in \mathbb{I}(\underbrace{\mathbb{V}(I)})$, Θ.δ.ο $g \in \operatorname{Rad} I$. δηλ. ικανοποιεί

μια σχέση $g^N = h_1 f_1 + \dots + h_n f_n$, $h_i \in \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$.

$$\langle f_1,..,f_n, x_{n+1}g - 1 \rangle \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1,...,x_n,x_{n+1}]$$

- Αν $p = (\underbrace{a_1,..,a_n}_{p'}, a_{n+1}) \in \mathbb{V}(\langle f_1,..,f_n, x_{n+1}g - 1\rangle) \Rightarrow$

$\Rightarrow p' \in \mathbb{V}(\langle f_1,..,f_n \rangle) = \mathbb{V}(I)$ άρα $g(p') = 0$.

άρα $f_1(p) = \dots = f_n(p) = g(p) = 0$ οπότε $a_{n+1}\, g(p) - 1 \neq 0$. άτοπο

άρα $\nexists\, p \in V(\langle f_1, .., f_n, x_{n+1} g - 1 \rangle)$.

Από Weak NSS: $\langle f_1, .., f_n, x_{n+1} g - 1 \rangle = \langle 1 \rangle$.

άρα $1 = \sum A_i(x_1, .., x_n, x_{n+1}) \cdot f_i(x_1, .., x_n) + B(x_1, .., x_n, x_{n+1})(x_{n+1} g(x_1, .., x_n) - 1)$. (*)

$R := \mathbb{C}[x_1, .., x_n]$ $\quad\uparrow$ σχέση στο $R[x_{n+1}]$.

Παίρνω $L = q.f.(R)$, η (*) ισχύει στο $L[x_{n+1}]$. Παίρνω $x_{n+1} = \dfrac{1}{g(x_1, .., x_n)} \in L$.

$$(*) \rightsquigarrow \quad 1 = \sum_i A_i(x_1, .., x_n, 1/g) \cdot f_i(x_1, .., x_n) = \sum \frac{\tilde{A}_i(x_1, .., x_n)}{g^{k_i}} f_i \overset{*}{=}$$

$$= \frac{\sum \tilde{\tilde{A}}_i(x_1, .., x_n) \cdot f_i}{g^N} \ (1) \Rightarrow g^N = \sum \tilde{\tilde{A}}_i(x_1, .., x_n) f_i \Rightarrow g \in \operatorname{Rad} I.$$

(1) $N \geq 1$ διότι $1 \notin I$.

ΔΙΑΣΤΑΣΗ του Krull.

R δακτύλιος

αλυσίδα πρώτων ιδεωδών μήκους n ή "πρώτη" είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία

$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$

$P_i \in Spec(R)$

$$\boxed{\dim(R) = \sup\{n : P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \text{ πρωτη αλυσίδα}\}}$$

$P \in Spec(R)$, R_P

είναι φανερό ότι μια πρώτη αλυσίδα που δεν μπορεί να επεκταθεί καταλήγει στο PR_P (το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του R_P)

$ht(P) := \dim R_P$ (ύψος του P)

Ισοδύναμα

Κάθε

$P_0R_P \subsetneq \cdots \subsetneq P_\ell R_P$

πρώτη αλυσίδα στον R_P αντιστοιχεί σε μια πρώτη αλυσίδα στον R, όπου όλα τα ιδεώδη που εμφανίζονται περιέχονται στο P.

$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_\ell$

Άρα $\dim(R) = \sup\limits_{P \in Spec(R)} \dim R_P$

Παραδείγματα

- K σώμα. $\dim K = 0$.

- $\mathbb{Z}$ Π.Κ.Ι.

$\langle 0 \rangle \subseteq (p)$ πρώτος

$\dim \mathbb{Z} = 1$

- $R = \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle$.

$\langle 6 \rangle = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle$.

$\operatorname{spec}(R) = \max\operatorname{Spec}(R) = \{\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle\}$

$\dim R = 0$

- $^{*}R = \overbrace{K[x_1, x_2]}^{R'} / \underbrace{\langle x_1^2, x_2^2, x_1x_2 \rangle}_{I}$ ②

$m = \langle x_1, x_2 \rangle \in \max\operatorname{Spec}_{K[x_1,x_2]}$

άρα

$\bar{m} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle \in \max\operatorname{Spec}(R)$

$I = m^2$

$R = R'/I$ πρώτη αλυσίδα στον R

$\updownarrow$ $\mathfrak{a}_0/I \subset \dots \subset \mathfrak{a}_\ell/I$

πρώτη αλυσίδα στον R' όπου $\mathfrak{a}_i$ πρώτα ιδεώδη που περιέχουν το I.

Ποια είναι τα πρώτα ιδεώδη που περιέχουν το I?

Εστω $Q \in \mathrm{Spec}(R')$ και

$m^{2'} = I \subset Q \Rightarrow$

$m \subset Q \Rightarrow m = Q$

<u>Αρα</u> $\dim R = 0$ αφου η μοναδικη πρωτη αλυσιδα στον R ειναι m/I

<u>Γενικοτερα</u> Αν το I ειναι m-πρωταρχικο οπου $m \in \max\mathrm{Spec}(R)$ τοτε $\dim R/I = 0$

---

* <u>Σημειωση</u> $R = K[x_1, x_2]/(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ ειναι <u>ακεραια</u> επεκταση του K

• $R' = K[x_1, x_2, x_3]$

$I = \langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle$

(ε.α.π. αναλυση του I)

και εστω $R = R'/I$

Εστω $P/I \in \mathrm{Spec}(R)$

Αρα το $P \in \mathrm{Spec}(R')$ και $I \subset P$

$\Rightarrow \langle x_1 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \subset P$

και αρα $\langle x_1 \rangle \subset P$ ή $\langle x_2, x_3 \rangle \subset P$

<u>Παρατηρουμε</u>

$\langle x_1 \rangle/I \subset \langle x_1, x_2 \rangle/I \subset \langle x_1, x_2, x_3 \rangle/I$

$\Rightarrow \dim R \geq 2$

④

Μια αλλη μεγιστη πρωτη αλυσιδα του R:

$\langle x_2, x_3\rangle / I \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3\rangle / I$

μηκος 1

<u>Παρατηρηση</u> $\dim R = 2$

<u>Προταση</u> Εστω $R \hookrightarrow R'$ R' ακ. επεκταση του R

Τοτε $\dim R = \dim R'$

<u>Απ</u>

Εστω

$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ ...

μια πρωτη αλυσιδα στον R

$\exists\, Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$.

$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$

<u>Πραγματι</u>

$\exists\, Q_0 \in Spec(R')$ τ.ω.

$Q_0 \cap R = P_0$

Απο Θεωρημα Ανοδοσης $\exists\, Q_i$ $i=1,\dots,n$

τ.ω. $Q_i^c = P_i$

$\Rightarrow \dim R \leq \dim R'$.

<u>Αντιστροφα</u>

Εστω.

$Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_e$ πρωτη αλυσιδα στον R'

$Q_0^c \subsetneq \cdots \subsetneq Q_e^c$. Απο τη μη συγκρισιμοτητα προυυπτει πρωτη αλυσιδα στον R $\Rightarrow$

$\dim R' \leq \dim R$

Πρόταση Εστω $\mathbb{K}$ σωμα

$\dim \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = n$.

Απ Επαγωγη στο n. $n=0$ ✓

Εστω $T = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Αφου $\langle 0 \rangle \subsetneq \langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

πρωτη αλυσιδα

$\Rightarrow \dim T \geq n$

Για να δειξουμε οτι $\dim T \leq n$ και αρα $\dim T = n$,

Εστω μια πρωτη αλυσιδα στον T

$\langle 0 \rangle \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_m$.

Αρκει να δειξουμε οτι $m \leq n$

Εστω $f \neq 0$, $f \in P_1$.

(Λημμα Με καταλληλη αλλαγη συντεταγμενων $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ τ.ω. $\lambda \cdot f(x)$ να ειναι μονικο ως προς το x_n)

Παρατηρηση 1 Εστω λf μονικο στο x_n στον δακτυλιο $\mathbb{K}[x_1', \dots, x_{n-1}', x_n]$

Τοτε x_n ειναι ακεραιο πανω απο τον δακτυλιο $\mathbb{K}[x_1', \dots, x_{n-1}', f]$

<u>Παραδειγμα</u> ~ $K = K[x,y]$

$\lambda f = y^2 + xy + 1$

Εστω $h(z) = z^2 + xz + 1 - \lambda f \in K[x,f]$

Τοτε $h(y) = 0$

<u>Αρα</u> y ειναι ακεραιο πανω απο τον $K[x,f]$

(και βεβαια

$$\begin{array}{c} K[x,y] \\ \Big| \text{ ακεραια επεκταση} \\ K[x,f] \end{array}$$

Παρατηρηση 2

$$T[a]/\langle a \rangle \simeq T$$

Με βαση το λημμα με αλλαγη συντεταγ μεταβλητων

$$\begin{array}{c} T = K[x_1,\dots,x_n] = K[x'_1,\dots,x'_{n-1},x_n] \\ \Big| \text{ ακεραιος} \\ K[x'_1,\dots,x'_{n-1},f] = S \end{array}$$

Εχουμε λοιπον μια πρωτη αλυσιδα στον S

$$\langle 0 \rangle \subsetneq S \cap P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S \cap P_m$$

ιδιου μηκους m (μη συγκρισιμοτητα)

Περναμε σε μια πρωτη αλυσιδα στον $S/\langle f \rangle$

$$S \cap P_1/\langle f \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq S \cap P_m/\langle f \rangle$$

<u>Ομως</u> $S/\langle f \rangle \simeq K[x'_1,\dots,x'_{n-1}]$

Απο την Υποθεση Επαγωγης: $m-1 \leq n-1 \Rightarrow m \leq n$.