Ακεραιότητα $R \subseteq A$

Πρόταση $R \subseteq A = R[a_1, \dots, a_n]$ τότε
η επέκταση είναι ακέραια $\Longleftrightarrow$
$a_1, \dots, a_n$ ακέραια $/ R$ $\Longleftrightarrow$
$A =$ π.π. R-module

π.χ. (1) $K \subseteq A = K[x,y]$ είναι ακέραια επέκταση; όχι

π.χ. (1) $K \overset{1-1}{\hookrightarrow} A = K[x,y]/\langle y^2 - x^2 \rangle = K[\bar{x}, \bar{y}] : K \subseteq A$ ακέραια επέκταση?
$c \longrightarrow \bar{c}$

$\bar{y}$ όχι ακέραιο $/ K$: αν ήταν $\bar{y}^n + c_{n-1}\bar{y}^{n-1} + \dots + c_1\bar{y} + c_0 = \bar{0}$

δηλ. $y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \dots + c_1 y + c_0 = (y^2 - x^2) h(x,y)$. ? $x = y$
$\forall y$! $y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \dots + c_1 y + c_0 = 0$ · άτοπο.

π.χ. 1

$$k[x] \xhookrightarrow{1-1} A = k[x,y]/\langle y^2 - x^2\rangle = k[\bar{x},\bar{y}]$$
$$f(x) \longrightarrow \overline{f(x)}$$

$$k[x] \cong k[\bar{x}] \subseteq \underbrace{k[\bar{x}][\bar{y}]}_{A} \quad \text{ακέραια ;;}$$

Είναι το $\bar{y}$ ακέραιο $| k[\bar{x}]$; $\quad \bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 0 \quad (T^2 - \bar{x}^2 \in k[\bar{x}][T]$ ΝΑΙ!

ακέραια επέκταση

π.χ. 2

$$k[x] \cong k[\bar{x}] \subseteq A = k[x,y]/\langle xy-1\rangle = k[\bar{x}][\bar{y}].$$

Είναι το $\bar{y}$ ακέραιο $| k[\bar{x}]$: αν ήταν: $\bar{y}^n + \alpha_{n-1}(\bar{x})\bar{y}^{n-1} + \dots + \alpha_1(\bar{x})\bar{y} + \alpha_0(\bar{x}) = 0$

δηλ. $y^n + \alpha_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + \alpha_1(x)y + \alpha_0(x) = (xy-1)(b_m(x)y^m + \dots + b_1(x)y + b_0(x)).$

$\cdot\, 1 = b_m(x)$, $m = n$. : βγάλτε άτοπο ....

πχ 3 $\quad k[x] \cong k[\bar{x}] \subseteq A = k[x,y]/\langle xy\rangle = k[\bar{x}][\bar{y}]$

$\bar{y}$ όχι ακέραιο $| \, k[\bar{x}]$ (όπως στο 2 - πιο εύκολο!)

<u>k = αλγ. κλειστό</u>:

αλγ. υποσύνολα του $k^n \xleftrightarrow{1-1}$ ριζικά ιδεώδη του $k[x_1,\dots,x_n]$

ανάγωγα —||— $\xleftrightarrow{-\|-}$ πρώτα —||—

σημεία του $k^n \longleftrightarrow$ μέγιστα —||—

$\rightarrow$ $X \subseteq k^n$ αλγεβρικό, $k[X] = k[x_1,\dots,x_n]/I(X)$ δακτύλιος συντεταγμένων

• $X' \underset{''=''}{\subseteq} X$ αλγεβρικό υποσύνολο $\underset{\Leftarrow}{\Longleftrightarrow}$ $I(X) \underset{''=''}{\subseteq} I(X')$.

Τα κλειστά υποσύνολα του X αντιστοιχούν σε ιδεώδη που περιέχουν το $I(X)$

—||— —||— του $k[X]$

Έχω : αλγεβρικά υποσύνολα του X $\longleftrightarrow$ ριζικά ιδεώδη του $k[X]$

ανάγωγα —||— $\longleftrightarrow$ πρώτα —||—

σημεία του X $\longleftrightarrow$ μέγιστα —||—

$\longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} Y' \subseteq Y \arrow[r, "\varphi"', "\text{μορφισμός}" below] \arrow[rr, bend left, dashed, "g\circ\varphi"] & X \arrow[r, dashed, "g"] & k \end{tikzcd} \rightsquigarrow \quad k[X] \xrightarrow[\text{ομομ. } k\text{-αλγ.}]{\tilde{\varphi}} k[Y] \rightsquigarrow$$

$$g \longmapsto \tilde{\varphi}(g) := g\circ\varphi$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{Spec} k[Y] \xrightarrow{\tilde{\varphi}^*} \operatorname{Spec} k[X]$$

$$p \longmapsto \tilde{\varphi}^{-1}(p) = p^c.$$

• Έστω $Y' = V(p)$ $\quad (I(Y') = p)$: $\quad V(p^c) \overset{(*)}{=} \overline{\varphi(Y')} \subseteq X.$

$\quad$ | πρώτο ιδεώδες

<u>Απόδειξη (*)</u>: $\overline{\varphi(Y')} = V(I(\varphi(Y')))$, και δείχνω ότι $I(\varphi(Y')) = p^c$. (**)

$Y \xrightarrow{\varphi} X$

$I(\varphi(Y')) = \{ g \in k[X] \ , \ g|_{\varphi(Y')} = 0$ δηλ. $\underbrace{g \circ \varphi}_{\tilde{\varphi}(g)}|_{Y'} = 0$

δηλ $\tilde{\varphi}(g) \in I(Y') = p$

δηλ $g \in \tilde{\varphi}^{-1}(p) \} = p^c$.

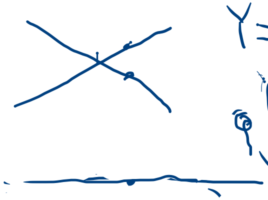
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

$$k[X] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} k[Y]$$
$$m_y^c \qquad\qquad m_y$$

, $Y' = \{y\} \Rightarrow I(Y') = m_y$ μέγιστο ιδεώδες

$m_y^c \underset{\text{από } (*)}{=} I(\varphi(y)) = m_{\varphi(y)}$
σημείο.

1



$Y = \mathbb{V}(y^2 - x^2) \subseteq k^2$

$\varphi \downarrow \quad (x,y) \mapsto x$

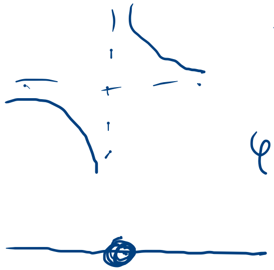
$X = k$

$k[x] \overset{\tilde{\varphi}}{\hookrightarrow} k[x,y]/\langle y^2 - x^2 \rangle$

ακέραια επέκταση:

Η φ: επί κ' $\varphi^{-1}(x)$ = πεπερ. σύνολο σημείων, $\forall x \in X$

2



$Y = \mathbb{V}(yx - 1) \subseteq k^2$

$\varphi \downarrow \quad (x,y) \mapsto x$

$k = X$

$0 \notin \operatorname{Im}\varphi$.

$k[x] \overset{\tilde{\varphi}}{\hookrightarrow} k[x,y]/\langle yx - 1 \rangle$

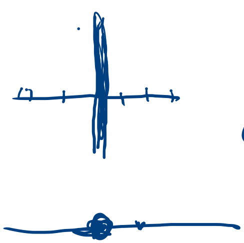
όχι ακέρ. επέκταση

$\langle x \rangle \neq p^c$, $p \in \operatorname{Spec} k[Y]$: Αν ναι,

Τότε από (*) $\underset{\{0\}}{\mathbb{V}(\langle x \rangle)} = \mathbb{V}(p^c) = \mathbb{V}(\overline{\varphi(Y')})$ κάποιο $Y' \subseteq Y$ κλειστό

$\{0\}$. άτοπο, διότι $\{0\} \notin \operatorname{Im}\varphi$.

3



$Y = \mathbb{V}(xy)$

$\varphi \downarrow \quad (x,y) \mapsto x$

$K \quad X$

0

$k[x] \overset{\tilde{\varphi}}{\hookrightarrow} k[x,y]/\langle yx \rangle$

όχι ακέραια επέκταση: $\varphi^{-1}(0)$ = άπειρο σύνολο

$$\underbrace{K[x]}_{R} \hookrightarrow \overbrace{K[x,y]/I}^{A}$$

$$x \to x+I$$

- $I = \langle x^2 - y^2 \rangle$

$P = \langle x \rangle$

$$P^e = \langle \bar{x} \rangle = \langle x+I \rangle$$
$$= (x+I)A \trianglelefteq A$$
$$= \langle x, x^2-y^2 \rangle / I$$
$$= \langle x, y^2 \rangle / I$$

P^e περιεχεται ελαχιστοτικα στο ιδεωδες $\langle x, y \rangle / I$.

Ερωτημα

Εστω $R \hookrightarrow A$.

και εστω $P \in Spec(R)$

ΠΟΤΕ $\exists P' \in Spec(A)$

$$P \overset{?}{=} (P')^c \quad P'$$

$$P^e = PA$$

$$\underline{R \qquad\qquad A}$$

$$P \rightsquigarrow PA = P^e$$
$$\cap$$
$$(P^e)^c$$

$$\boxed{P \subset P^{ec}}$$

$$Q^c \leftarrow Q$$
$$Q^c \to Q^{ce}$$

$$\boxed{Q^{ce} \subset Q}$$

$\overset{R}{K[x]} \longrightarrow \overset{A}{K[x,y]/I}$

- $I = \langle xy - 1 \rangle$

$P = \langle x \rangle$

$P^e = \langle x, xy-1 \rangle / I$

$= \langle x, 1 \rangle / I = A$

$(P^e)^c = R$

Δεν υπαρχει πρωτο ιδεωδες του A που να συστελλεται στο P γιατι αναγκαστικα ενα τετοιο ιδεωδες θα επρεπε να περιεχει και το P^e ΑΔΥΝΑΤ

<u>Πρόταση</u>

$R \hookrightarrow R'$, $P \in Spec(R)$.

$\exists$ $P' \in Spec(R')$ τ.ω. $P' \cap R = P$
αν-ν

$P^{ec} = P$

<u>Απ</u>

"$\Longrightarrow$" Εστω οτι $\underline{P' \cap R = P}$

Τοτε $P^e \subset P' \Longrightarrow$

$(P^e)^c \subset (P')^c \underset{\text{υποθεση}}{=} P$

$\Rightarrow$ αφου $P \subset (P^e)^c \subset P$

$\Rightarrow$ $P = P^{ec}$

⇐ Έστω τώρα ότι

$$p^{ec} = p$$

$S = R \setminus p$ * πολλ. κλειστό υποσύνολο του R και του R'

Θα περάσουμε στην $S^{-1}R'$ κ' θα χρησιμοποιήσουμε αντιστοιχίες ιδεωδών

$$R' \;—\; \underline{S^{-1}R'}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$p^e \cap S = \emptyset :$$

διαφορετικά αν $r \in R\setminus p = S$ κ' $r \in p^e$ τότε

$$r \in p^{ec} = p \rightarrow\leftarrow$$

__Επομένως__

$$p^e S^{-1}R' \underset{\neq}{\trianglelefteq} S^{-1}R'.$$

άρα περιέχεται σε ένα μέγιστο ιδεώδες του $S^{-1}R'$,

έστω $\underline{m S^{-1}R'}$

$$\in \operatorname{maxSpec} S^{-1}R'$$

το οποίο περιέχει το

$$p^e S^{-1}R' \quad (\text{όπου } m \in \operatorname{Spec}(R'))$$

και βέβαια $\boxed{m \cap S = \emptyset}$

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & S^{-1}R' \\ p & \longrightarrow & \underline{p^e} & — & p^e S^{-1}R' \\ & & \cap & & | \\ & & m & \longleftrightarrow & m S^{-1}R' \end{array}$$

__Ισχυρισμός__ $p \subset m \cap R = p$ ∎

<u>Επικάλυψη</u> Lying over

Αν $R \hookrightarrow R'$ ακέραια επέκταση, και $P \in Spec(R)$

<u>ΤΟΤΕ</u> $P^{ec} = P$ και ισοδύναμα συνέπεια υπάρχει $P' \in Spec(R')$ τ.ω. $P' \cap R = P$

<u>ΑΠ</u> Πάντα $\boxed{P \subset P^{ec}}$

Π.Ν.Ο. $P^{ec} \subset P$

Εστω $a \in (P^e)^c$

$a \in R$ και $a \in P^e$

<u>άρα</u> $a = p_1 b_1 + \dots + p_k b_k$

όπου τα $b_i \in R'$

κ' $p_i \in P$.

Τα b_i είναι ακέραια πάνω από τον R.

Εστω

$R'' = R[b_1, \dots, b_k]$

R'' π.π. R-module

<u>και</u>

$aR'' \subset PR''$ αφού

$a \cdot 1 \in PR'' \Rightarrow$

$ar'' \in PR''$ $\forall r'' \in R''$

<u>NAK</u> ~~Επομένως~~

a ικανοποιεί μια εξίσωση

$a^k + c_1 a^{k-1} + \dots + c_k = 0$

όπου τα $c_i \in P' \subset P$

Αφού $a \in R \Rightarrow$

$a^{k-1} + \dots + c_k \in P \Rightarrow a^k \in P$

$\Rightarrow a \in P\,! \Rightarrow P^{ec} \subset P$.