Λημμα NAK. Έστω M ένα π.π. R-module. Και έστω $s\in R$ τ.ω. $sM \subset IM$ όπου $I \triangleleft R$. Τότε $\exists\, n\in\mathbb{N}$ και $a_i \in I^i$ τ.ω.

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)m = 0 \quad \forall m\in M.$$

(Είδαμε ότι $n = \#$ γεννητόρων του M ως R-module)

A $n\times n$ $A\in M_n(R)$ δουλεύω

$$(\operatorname{adj} A)\, A = \det(A)\, I_n$$

$$\operatorname{ann}_R(M) = \{r\in R : rm = 0 \ \forall m\in M\}.$$

R-μηδενιστής του M

Λημμα του NAK $\Longrightarrow$

$\exists\, p(x)$ μονικό (αρχικό συντελ. 1) τέτοιο ώστε $p(s) \in \operatorname{ann}_R(M)$.

Γενίκευση του Cayley-Hamilton (1)

M π.π. R-module

$\varphi : M \to M$ R-ομομορφ.

$\varphi(M) \subset IM$

$I \triangleleft R$.

Τότε $\exists\, p(x) = x^n + \dots + a_n$ με $a_i \in I^i$ τ.ω.

$p(\varphi) : M \to M$ να είναι ο μηδενικός ομομορφισμός

$$p(\varphi) = \varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_n \mathrm{id}_M.$$

Απ. M γίνεται $R[x]$-module με πράξεις $xm = \varphi(m)$

(προσθέστε τις λεπτομέρειες... προσοχή στο ιδεώδες ... που ...)

ανήκουν τα a_i της απόδειξης ?

<u>Πόρισμα</u> M π.π., $I \trianglelefteq R$ και έστω $M = IM$. Τότε $\exists\, r \in R$ τ.ω. $r - 1 \in I$ και $r \in ann_R(M)$ <u>δηλ.</u> $rM = 0$

<u>Απ</u> NAK (με $s = 1$) $\Rightarrow$

$$(1^n + \underbrace{a_1 1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}}_{\in I} + a_n) \in ann_R(M)$$

r

$a_i \in I$

$r - 1 = a_1 + \cdots + a_n \in I$

<u>Παράδειγμα</u> π.π. αναγκαία συνθήκη. $\mathbb{Q}$ ως $\mathbb{Z}$-module

$I = 2\mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Q} = I\mathbb{Q}$

<u>Όμως</u> $\nexists\, r \in \mathbb{Z}$ με $r - 1 \in 2\mathbb{Z}$ και $r\,\mathbb{Q} = 0$. (γιατί?)

<u>Πόρισμα</u> M π.π. $M = IM$ και έστω ότι $I \subset \bigcap_{P \in maxSpec(R)} P \;(= J(R))$. Τότε $M = 0$

<u>Απ</u> $\exists\, r \in R$ τ.ω. $r - 1 \in J(R)$ και $rM = 0$

<u>Όμως</u> αφού $r - 1 \in J(R)$ $\Rightarrow r - 1 \in P \;\forall P \in maxSpec$ $\Rightarrow r \notin P$ για $P \in maxSpec$

③

Διαφορετικά

Αν $\exists P \in \max\operatorname{Spec} R$

τ.ω. $\left.\begin{array}{l} r \in P \\ r-1 \in P \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in P \Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow r$ αντιστρέψιμο!

$\langle r \rangle = R$ δηλ. $r \in U(R)$

Αφού

$rM = 0 \Rightarrow r^{-1}(rM) = 0$

$\Rightarrow M = 0$ ■

Ειδική περίπτωση:

Τοπικός δακτύλιος

(R, m) $(R, m, R/m)$

$\{m\} = \max\operatorname{Spec}(R)$

Πόρισμα

Έστω M π.π. (R, m) τοπικός δακτ.

$I \trianglelefteq_{\neq} R$

Αν $M = IM \Rightarrow M = 0$

Απ

$J(R) = m$ ■

Πόρισμα M π.π.

N R-υποmod του M

$M = N + J(R) M$

Τότε $M = N$

Απ

$$** \; I(M/N) \overset{\text{απόδειξη}}{=} IM + N / N$$

$\subset M/N$

(4)

$\theta.N.\delta.O \quad M=N$

$\iff M/N = 0$

$$J(R)\left(M/N\right) = J(R)\,\overbrace{M+N}^{M} \big/ N$$

Αρα

$J(R)(M/N) = M/N \overset{\diamond}{\Longrightarrow}$

$M/N = 0 \Longrightarrow M=N$

$\diamond \quad \underset{\langle \omega_1,\dots,\omega_n\rangle}{\overset{M}{\parallel}} \;\; \pi.\pi \Longrightarrow M/N$ ειναι $\pi.\pi.$

$\langle \bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_n\rangle$

Παρατηρηση

M R- mod

$I \trianglelefteq R$ τοτε

M/IM ειναι R/I-modulo

με εξωτ. πολλ.

$$R/I \times M/IM \longrightarrow M/IM$$

$$\bar{r} \cdot \bar{m} = \overline{rm}$$

* ειναι καλα ορισμενος

δηλ. αν $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$ $(r_1 - r_2 \in I)$

κ' αν $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ $(m_1 - m_2 \in IM)$

τοτε $\overline{r_1 \cdot m_1} = \overline{r_2 \cdot m_2}$

δηλ. $r_1 m_1 - r_2 m_2 \in IM$

Πόρισμα. (R, m, k) $\nearrow R/m$
τοπικός δακτ.
και έστω M π.π.
R-module.

Αν $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}$ παράγουν
το M/mM ως R/m δ.χ.

~~Τότε~~ τα

$w_1, \dots, w_n$ παράγουν το
M ως R-module.

Κατά συνέπεια: έχει
νόημα να μιλάμε για
ελαχιστοτικά σύνολα γεννητόρων
κ' όλα τα ελαχιστ. σύνολα
γεννητόρων του M

έχουν τον ίδιο
\# γεννητόρων.

~~Αντίστροφο του πορίσματος?~~

Απ

Έστω $N = R\langle w_1, \dots, w_n \rangle$

Τότε παρατηρούμε ότι
$N + mM = M$

πράγματι
$N + mM \subset M$
Για τον εγκλεισμό "$\supset$".
έστω $w \in M$ Τότε
$\overline{w} = w + mM \in M/mM$
μπορεί να γραφεί
$\overline{w} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i}\,\overline{w_i}$ Άρα
$w - \sum r_i w_i \in mM \Rightarrow$

$$\omega = \underbrace{\left(\Sigma r_i \omega_i\right)}_{N} + \underbrace{\left(\omega - \Sigma r_i \omega_i\right)}_{\pi M}$$

Αφου

$$N + \pi M = M$$

$$\Longrightarrow M = N = R\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle$$

∎

Ακεραιότητα : $\underset{\text{δακτ.}}{R} \subseteq \underset{\text{δακτ}}{A}$ επέκταση δακτυλίων (Θ. Σωμάτων $K \subseteq L$ επεκτάσεις σωμάτων)

- A είναι μία R-άλγεβρα (δακτύλιος + R-module)

→ α) A π.π. R-άλγεβρα : $A = R[a_1, \dots, a_m]$, $a_i \in A$.
β) A π.π. ως R-module : $A = Ra_1 + \dots + Ra_s$, $a_i \in A$
$= R\langle a_1, \dots, a_s \rangle$

β) ⇒ α)

→ Ακέραια στοιχεία : Ένα $a \in A$ λέγεται ακέραιο / R αν :

$\exists$ μονικό $f(x) \in R[x]$ με $f(a) = 0$ δηλ. $\exists\, r_{n-1}, \dots, r_1, r_0 \in R$

με $$a^n + r_{n-1} a^{n-1} + \dots + r_1 a + r_0 = 0$$

→ Η επέκταση δακτυλίων $R \subseteq A$ λέγεται ακέραια επέκταση ή ότι ο A είναι ακέραιος / R αν κάθε $a \in A$ είναι ακέραιο / R.

Παρε την $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$: ποιά στοιχεία του $\mathbb{Q}$ είναι ακεραία $/\mathbb{Z}$.

- αν $a \in \mathbb{Z}$ τοτε $f(x) = x - a \in \mathbb{Z}[x]$ εχει $f(a) = 0$.
  αρα a ακεραιο $/\mathbb{Z}$.

- παρε $a \notin \mathbb{Z}$ π.χ. $a = 3/2$. Αν ηταν ακεραιο $/\mathbb{Z}$ θα ικανοποιουσε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n + r_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \dots + r_1\left(\frac{3}{2}\right) + r_0 = 0, \quad r_i \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{3^n}_{\text{δεν διαιρειται απο το 2}} + \underbrace{r_{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-1} + \dots + r_1 \cdot 2^{n-1} \cdot 3 + r_0 \cdot 2^n}_{\text{διαιρειται απο το 2}} = 0$$

Αρα οι μονοι "ακεραιο ρητοι" ειναι ακεραιοι.

π.χ. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ ποιοι μιγαδικοί είναι ακεραιοι $/\mathbb{Z}$: ? π.χ. $\sqrt{2}$ ακεραιο $/\mathbb{Z}$
εχει δομη δακτυλίου: $x^2 - 2$.

π.χ. $\mathbb{Q} \subseteq F$ ↝ number fields ; ποια είναι τα ακέραια στοιχεία

↳ πεπερ. επέκταση

<u>Θ. Σωμάτων</u> : $k \leq L$

- $\dim_k L < \infty$: πεπερ. επέκταση
- $\dim_k L = \infty$: άπειρη επέκταση

Ανάλογο ισχύει σε επεκτάσεις δακτυλίων: $R \subseteq A$:

- A π.π. R-module
- A όχι π.π. —||—

<u>Υπενθύμιση</u> : αν $k \leq L$ πεπερ. επέκταση σωμάτων τότε αλγεβρική.

<u>Πρόταση</u> : Έστω $R \subseteq A$ με A π.π. R-module. Τότε A ακέραιο / R.

<u>Απόδ.</u> $a \in A$, $\varphi_a : A \to A$ με $\varphi_a(t) = at$ - είναι R-module ομομορφ

Εφαρμόζω C-H $(I = R)$: $\exists\, r_0, \dots, r_{n-1} \in R$ με $\varphi_a^n + r_{n-1}\varphi_a^{n-1} + \dots + r_1\varphi_a + r_0 : A \to A$ <u>είναι ο μηδενικός</u>

Τον εφαρμόζω στο 1_A : $\underbrace{\varphi^n(1_A)}_{a^n} + r_{n-1}\underbrace{\varphi^{n-1}(1_A)}_{a^{n-1}} + \dots + r_1 \underbrace{\varphi(1_A)}_{a} + \underset{\underset{r_0}{\parallel}}{r_0 \cdot 1_A} = 0 \in A$

άρα $a^n + r_{n-1}a^{n-1} + \dots + r_1 a + r_0 = 0$, $r_i \in R \Rightarrow a$ ακέραιο $|R$.

<u>Θ. Σωμάτων</u>. Έστω $K \subseteq L = K(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in L$. Τότε

↳ επεκτ. σωμάτων

$K \subseteq L$ αλγεβρική $\iff a_1, \dots, a_n$ αλγεβρικά $|K \iff K \subseteq L$ πεπ. επέκταση

<u>Ανάλογο στις επεκτάσεις δακτυλίων</u> :

Έστω $R \subseteq A$ επέκταση δακτυλίων με $A = R[a_1, \dots, a_n]$ $a_i \in R$
(δηλ. A = πεπ. R-άλγεβρα.)

Τότε :

$R \subseteq A$ ακέραια επέκταση (1) $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_n$ ακέραια $/ R$ (2)

$\Leftrightarrow$ $A =$ π.π. R-module (3)

(3) $\to$ (1) το είδαμε. Μένει (2) $\to$ (3): Με επαγωγή στο n.

(1) $\to$ (2) —||—

$n=1$: $R \subseteq A = R[a_1]$ με a_1 ακέραιο $/ R$. δηλ. ικανοποιεί

$$a_1^m + r_{m-1} a_1^{m-1} + \dots + r_1 a_1 + r_0 = 0, \quad r_i \in R$$

$$\Rightarrow a_1^m \in R\langle a_1^{m-1}, \dots, a_1, 1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^k \in R\langle a_1^{m-1}, \dots, a_1, 1\rangle, \quad k \geq m$$

Αν $a \in R[a_1]$ τότε $a = f(a_1)$, $f \in R[x]$

$\Rightarrow a \in R\langle a_1^{n-1}, \dots, a_1, 1_A\rangle$

άρα $R[a_1] =$ (π.π. R-module)

<u>Παρατήρηση</u>: • $S = R\langle s_1, \dots, s_\lambda\rangle$, $T = S\langle t_1, \dots, t_\kappa\rangle$, $R \subseteq S \subseteq T$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T = R\langle s_i t_j,\ 1 \le i \le \lambda,\ 1 \le j \le \kappa\rangle.$$

• $S = R[s_1, \dots, s_\lambda]$, $T = S[t_1, \dots, t_\kappa] \Rightarrow T = R[s_1, \dots, s_\lambda, t_1, \dots, t_\kappa]$

<u>Επαγωγικό βήμα</u>: Υποθέτω ότι ισχύει για $< n$. Το δείχνω για n:

$$R \subseteq \underbrace{R[a_1, \dots, a_{n-1}]}_{S} \subseteq \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{S[a_n]}$$

$a_1, \dots, a_{n-1}$ ακέραιο $| R \xrightarrow{\text{Επαγ.}} S =$ π.π. R-module

a_n ακέραιο $| R \Rightarrow a_n$ ακέραιο $| S \xrightarrow{1^o \text{ θεώρημα}} A =$ π.π. S-module $\Big\} \Rightarrow$

$A =$ π.π. R-module.