Ασκήσεις #4

1 α) $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2-y^3\rangle = \mathbb{C}[\bar{x},\bar{y}]$

• $\mathbb{C}[x] \xhookrightarrow{\ i\ } \mathbb{C}[\bar{x},\bar{y}]$, $\quad x \longmapsto \bar{x}$ $\qquad \left(i(\mathbb{C}[x]) = \mathbb{C}[\bar{x}] \right)$

είναι εμφύτευση, οπότε $\mathbb{C}[x] \cong \underbrace{\mathbb{C}[\bar{x}]}_{R} \subseteq \mathbb{C}[\bar{x},\bar{y}] = R[\bar{y}]$.

Πότε $i(f(x)) = \bar{0} \iff \underset{\overline{f(x)}}{\underset{\shortparallel}{f(\bar{x})}} = \bar{0}$ στον $\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2-y^3\rangle$

$\iff f(x) \in \langle x^2-y^3\rangle$ ↯

• Αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{y}$ ακέραιο / R: δηλ. $\exists$ μονικό πολυώνυμο $g(t)$ του $R[t]$ με $g(\bar{y}) = \bar{0}$: $\quad T^3 - \bar{x}^2 \in \underset{\mathbb{C}[\bar{x}]}{\underset{\shortparallel}{R[T]}}$ $\quad$ v-β) $R = \mathbb{C}[x,y,z,w] / \langle xy - zw \rangle = \mathbb{C}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}]$

→ Αλλαγή μεταβλητών ώστε μονικό ως προς των w.

$$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow x \\ y \longrightarrow y \\ z \longrightarrow z - w \\ w \longrightarrow w \end{array}\right\} \quad xy - zw \rightsquigarrow xy - (z-w)w = xy - zw + w^2$$

μονικό ως πολυώνυμο των w.

$\boxed{z' = z + w}$

$$R \cong \mathbb{C}[x,y,z',w] / \langle xy - (z'-w)w = xy - z'w + w^2 \rangle .$$

- $\mathbb{C}[x,y,z'] \cong \underbrace{\mathbb{C}[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}']}_{R} \subseteq R[w]$ ακέραια. ✓.

γ) $R = \mathbb{R}[x,y,z] / \langle x-yz,\ y^2-xy+z^2 \rangle \cong$

$$\mathbb{R}[y,z] / \langle y^2-y^2z+z^2 \rangle = \mathbb{R}[\bar{y},\bar{z}].$$

$\left(\mathbb{R}[x,y,z]/\langle x-yz \rangle \cong \mathbb{R}[y,z] :\ \begin{array}{l} \mathbb{R}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}[y,z] \\ f(x,y,z) \longmapsto f(yz,y,z) \end{array} \right)$

$\mathbb{R}[y] \cong \mathbb{R}[\bar{y}] \subseteq \mathbb{R}[\bar{y}][\bar{z}]$: $\bar{z}$ ακέραιο / $\mathbb{R}[\bar{y}]$ διότι ικανοποιεί

το μονικό πολυώνυμο $T^2 - y^2T + y^2$.

Ποια η διάσταση της $V(\langle x-yz,\ y^2-xy+z^2 \rangle) = V$

$\rightarrow$ Αν δουλεύουμε στο $\mathbb{C}$: $I(V) = \langle x-yz,\ y^2-xy+z^2 \rangle$ $\rightsquigarrow$ είναι εύκολο (αφού ισχύει από NSS)

$$(x,y,z) \longrightarrow (yz, \tfrac{x}{z}, z)$$

• $V \subseteq \mathbb{R}^3 \cong V' \subseteq \mathbb{R}^2$

$V' = \mathbb{V}(y^2 - y^2 z + z^2)$. άπειρο σύνολο.

$y^2(1-z) + z^2 = 0 \iff y^2 = \dfrac{z^2}{z-1}$

• Αν $V_1 \subsetneq V'$ τότε $V_1 =$ πεπ. σύνολο σημείων. (ή το ϕ)
↳ (ανάγωγο.)

Αν $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$, $(f,g)=1 \Rightarrow \exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x,y]$ με

$h_1 f + h_2 g = t(x)$. (όμοια με το y)

Άρα $\mathbb{V}(f,g) <$ πεπερ. σύνολο.

② a) $f \in k[x_1, \dots, x_n] \Longrightarrow \operatorname{codim}_{k^n} V(f) = 1$.
k: αλγ. κλειστό.

Δηλ. δείξτε ότι το $\langle f \rangle$ έχει $ht\langle f\rangle = 1$.

$\langle 0 \rangle \subseteq \langle f \rangle$ άρα $ht\langle f \rangle \geq 1$.

→ Έστω P πρώτο ιδεώδες με $\langle 0 \rangle \subsetneq P \subsetneq \langle f \rangle$. Θα φτάσουμε σε άτοπο;

$(\exists\, g \in P$, $g \neq 0$, $P \subseteq \langle f \rangle$ και $f \notin P)$: $g = f^s \cdot h$, $s \geq 1$, $(h, f) = 1$.

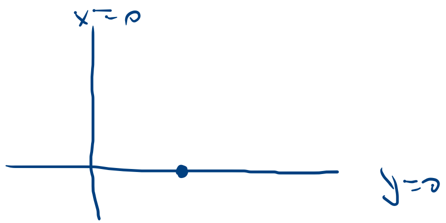
$g \in P$, $f \notin P$ $\Big\}$ $h \in P \Rightarrow h \in \langle f \rangle \Rightarrow f \mid h$ $\Big\}$ ↯

(3) $R = k[x,y]/\langle xy\rangle$, $V = V(xy)$

α) $ht\langle \bar{x}\rangle = 0$ $\ldots \subsetneq \bar{p} \subsetneq \langle \bar{x}\rangle$

β) $ht\langle \overline{x-1}\rangle = 1$ $\ldots \subsetneq \bar{p} \subsetneq \langle \overline{x-1}\rangle$

γ)



$\bar{x}=0 \leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ xy=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=0 \xrightarrow{\text{ορισμ}} \Big| \subseteq V$ codim $=0$

$\overline{x-1}=0$ $\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ xy=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=1, y=0$: $\underset{(1,0)}{\bullet} \subseteq V$ codim $=1$

Ποια τα πρωτα ιδεώδη του R $\longleftrightarrow$ πρωτα ιδεώδη του $k[x,y]$ που περιέχουν το xy $\longleftrightarrow$ ———//——— που περιέχουν το x ή το y.

Ποια τα πρωτα ιδεώδη του $k[x,y]$ που περιέχουν το $\langle x\rangle$? = πρωτα ιδεώδη του $k[x,y]/\langle x\rangle \cong k[y]$: $\langle f(y)\rangle$, $f(y)$ ανάγωγο άρα πρώτα ιδεώδη του $K[x,y]$ που περιέχουν το x είναι $\langle f(y), x\rangle$ με f → ανάγωγο ή μηδέν

Συμμετρικά για το $\langle y\rangle$,

άρα τα ~~ιδεώδη~~ πρώτα ιδεώδη του R αντιστοιχούν σε ιδεώδη του $K[x,y]$ της μορφής

$\langle f(y), x\rangle$, $\langle f(x), y\rangle$

↳ ανάγωγο ή 0 ↳ ανάγωγο ή 0.

$$\underset{R}{\langle \bar{x}\rangle} \hookrightarrow \underset{K[x,y]}{\langle x, xy\rangle} = \langle x\rangle, \quad \underset{R}{\langle \overline{x-1}\rangle} \hookrightarrow \underset{K[x,y]}{\langle x-1, xy\rangle} = \underset{\langle y\rangle}{\underset{\supsetneq}{\langle x-1, y\rangle}}$$

Σημ.: $\langle xy\rangle = \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$. άρα στο R/I $\langle \bar{0}\rangle = \langle \bar{x}\rangle \cap \langle \bar{y}\rangle$

↑ ελαχιστικό

$\Rightarrow ht\langle \bar{x}\rangle = 0$

(4) $V = V(t, t^2, t^3)$, $\dim V = 1$

- $\begin{array}{ccc} V & \cong & K \\ \cap & & \| \\ K^3 & & K \end{array}$

$$\begin{array}{ccc} K^3 & \longrightarrow & K \\ (x,y,z) & \longmapsto & x \\ & & \\ K^3 & \longleftarrow & K \\ (x, x^2, x^3) & \longleftarrow & x \end{array} \Bigg\} \text{ επάγουν ισομορφισμό των } V \text{ με το } K.$$

- $K[x,y,z]/I(V) \cong K[x,y,z]/\langle y-x^2, z-x^3 \rangle \cong K[x]$. δες διαπασ ⊥

5 α) $R = k[x]/\langle x^4 \rangle$, β) $R = k[x,y]/\langle (x-1)^4, (y-2)^4 \rangle$

γ) $R = k[x,y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$.

→ Αρκεί να δείξω ότι $\mathrm{Spec}\, R = \{m\}$.

β) πρώτα του R $\longleftrightarrow$ πρώτα του $k[x,y]$ που περιέχουν $\langle (x-1)^4, (y-2)^4 \rangle$

$\langle (x-1)^4, (y-2)^4 \rangle \subseteq p \Longrightarrow \underbrace{\langle x-1, y-2 \rangle}_{= m} \subseteq p \Rightarrow p = m$.

(6) $R = \mathbb{C}[x,y]/I$, $I = \langle xy-1,\ x^2+y^2 \rangle$

α) $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^2$??

$$\begin{cases} x^2 \cancel{+} y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \iff (x+iy)(x-iy) = 0 \begin{cases} x = iy \\ x = -iy \end{cases}$$

• $x = iy$: $iy^2 = 1 \Rightarrow y^2 = -i \Rightarrow y^2 = -\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(y/e^{\pi i/4} \right)^2 = -1 \iff y/e^{\pi i/4} = \pm i \Rightarrow y = \pm i e^{\pi i/4}$$

Τελικά έχω 4 σημεία . . . $(-e^{\pi i/4}, ie^{\pi i/4}), (e^{\pi i/4}, -ie^{\pi i/4})$

. . . . . . —

→ Αντιστοιχία πρώτων ιδεωδών με ανάγωγα υποσύνολ. του $\mathbb{V}(I)$.

(7) $R \subseteq S$ ακέραια επέκταση, S ακ. περιοχή.

$I \subseteq S$ Αν $I \neq 0$ τότε $I \cap R \neq 0$.

• $\underset{\neq 0}{a} \in I$: $\exists$ μονικό πολυώνυμο του $R[x]$ με ρίζα το a:

$$a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 = 0.$$

$b_0 \neq 0$ ↳ ακ. περιοχή

~~ελαχίστου βαθμού.~~

~~Υποθέτουμε ότι $I \cap R = 0$: φτάνουμε σε άτοπο:~~

$$I \cap R \ni \underbrace{a(a^{n-1} + b_{n-1}a^{n-2} + \dots + b_1)}_{\in I} = \underset{\in R}{-b_0} \neq 0$$

$\Rightarrow b_0 \in I \cap R$, $b_0 \neq 0$

$\dim R/I^c = \dim S/I$ $\boxed{R/I^c \subseteq S/I}$ ↳ ακέραια

S αν.πρ. $I \neq 0$ $\quad \boxed{\dim S/I} < \dim S.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad m$

Ναι $\quad I \subseteq p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_m \subseteq S.$

τότε $\quad 0 \subsetneq p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_m \subseteq S$

Αν $I = p \neq 0$ πρώτο και $I^c = 0$

τότε θα έχω

$\underline{0^c = p^c}$ · άτοπο

$I \subseteq J \;\Rightarrow\; ht(I) \leq ht(J)$

$V(I) \supseteq V(J)$

$I \subseteq p$

J

$p \subset I$

$0^c \quad p^c \quad I^c$

(9) $\dim \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \,?$ $\quad \dim = 1.$

$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[x] \subseteq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$

$0 \subseteq \langle x, x^{-1} \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$

$\langle x \rangle$: $\boxed{x x^{-1} = 1}$

$\mathbb{C}[x] \not\cong \mathbb{C}[x, x^{-1}]$

$\mathbb{C}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, x^{-1}] \not\cong \mathbb{C}[x,y]$

$f(x) \mapsto f(x)$

$\mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}[x, x^{-1}] \cong \boxed{\mathbb{C}[x,y] \big/ \langle xy - 1 \rangle}$$

$$\mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[x, x^{-1}]$$
$$f(x,y) \mapsto f(x, x^{-1})$$

$\ker \varphi = \langle xy - 1 \rangle$

$x' = x + y$

$$\mathbb{C}[x,y] \big/ \langle xy-1 \rangle \cong \mathbb{C}[x', y] \big/ \langle (x'-y)y - 1 \rangle = \langle -1 + x'y - y^2 \rangle$$

$\mathbb{C}[x] \subseteq \mathbb{C}[\bar{x}', \bar{y}]$ $\quad \dim = 1$

y algebraic.

(16) $R = \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] / \underbrace{\langle x_1^2, x_2^2, x_2 x_3 \rangle}_{I}$

• Ποια τα πρώτα ιδεώδη του R ? $\leftrightarrow$ πρώτα του $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ που περιέχουν το I.

Άρα αν p πρώτο του $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ που περιέχει το I τότε

$x_1, x_2 \in p$ / $x_2 \in p$ \ $x_3 \in p$. $\Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq p \Rightarrow p = \langle x_1, x_2, x_3 - c \rangle$ ή 0

$\Updownarrow$

πρώτα του $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] / \langle x_1, x_2 \rangle \cong \mathbb{C}[x_3]$

Μέγιστη αλυσίδα $\langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 - c \rangle$

Άρα $\dim R = 1$

Παρ/ε $p = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $ht(p) = 1$ πρώτο και περιέχει

Εναλλακτικά $\langle \bar{a} \rangle \subseteq \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$

$\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \hookrightarrow$ να θέλω, με $\langle a \rangle + I \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

$$\langle a \rangle + I \not\subseteq \langle x_1, x_2 \rangle$$

$a = x_3$! $\langle a \rangle + I = \langle x_3, x_1^2, x_2^2 \rangle \not\subseteq \langle x_1, x_2 \rangle$. ✓