Θεώρημα

Έστω R δακτύλιος του Artin με $\operatorname{Spec}R=\{m_1,\dots,m_n\}$. Τότε:

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} m_i = Rad(0) = m_1 \cdots m_n$

(2) $R/Rad(0) \cong R/m_1 \times \dots \times R/m_n$

(3) $R \cong R_{m_1} \times \dots \times R_{m_n}$

Απόδειξη

(2) Θεωρούμε τον ομομορφισμό:

$$\varphi: R \to R/m_1 \times \dots \times R/m_n$$
$$r \mapsto (r \bmod m_1, \dots, r \bmod m_n)$$

Απο το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων προκύπτει ότι ο φ είναι επί

Επίσης $\ker\varphi = \{r \in R : r = 0 \bmod m_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}\}$
$= \{r \in R : r \in m_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}\} = \bigcap_{i=1}^{n} m_i = Rad(0)$

(3) Γνωρίζουμε ότι $\exists k \in \mathbb{N}$ ώστε $m_1^k \cap \dots \cap m_n^k = (m_1 \cdots m_n)^k = 0$ και τα $m_1^k, \dots, m_n^k$ είναι ανα δύο σχετικά πρώτα

Θεωρούμε τον $\varphi: R \to R/m_1^k \times \dots \times R/m_n^k$
$$r \mapsto (r \bmod m_1^k, \dots, r \bmod m_n^k)$$

Από το Κινέζικο Θεώρημα υπολοίπων ο φ είναι επί και $\ker\varphi = m_1^k \cap \dots \cap m_n^k = \langle 0 \rangle$

Άρα $R \cong R/m_1^k \times \dots \times R/m_n^k$

Παρατηρούμε ότι ο R/m_i^k είναι τοπικός δακτύλιος του Artin με μέγιστο ιδεώδες $\overline{m_i}$
Θα δείξουμε ότι $R/m_i^k \cong R_{m_i}$ $i=1,\dots,n$

- Θεωρούμε τον ομομορφισμό $R \to R/m_1^k$ με $r \mapsto \bar{r}$
Τότε αν $r \in R \setminus m_1$ το $\bar{r}$ είναι μονάδα του R/m_1^k διότι αλλιώς θα έπρεπε $\langle \bar{r} \rangle \subseteq \overline{m_1}$ που δεν ισχύει

Από καθολική ιδιότητα τοπικοποίησης υπάρχει ομομορφισμός $\varphi: R_{m_1} \to R/m_1^k$ με $\frac{r}{a} \mapsto \bar{a}^{-1}\bar{r}$

Βλέπουμε ότι είναι επί

$\ker\varphi = \{ \frac{r}{a} \mid \bar{a}^{-1}\bar{r} = 0 \} = \{ \frac{r}{a} \mid r \in m_1^k \}$
Όμως αν $r \in m_1^k$, επιλέγουμε $r_j \in m_j \setminus m_1$ $j \in \{2,\dots,n\}$
Τότε αν $u = r_2^k \cdots r_n^k$ έχουμε ότι $u \notin m_1$ και $r \cdot u = r_1^k r_2^k \cdots r_n^k \in m_1^k \cdots m_n^k = \langle 0 \rangle$. Δηλαδή $u \cdot r_1 = 0$ και άρα $\frac{r}{a} = \frac{0}{1}$

Συνεπώς $\ker\varphi = \langle \frac{0}{1} \rangle$ και άρα $R_{m_1} \cong R/m_1^k$

Παραδείγματα

(1) Έστω $A = K[x]/\langle x(x-1)\rangle$. Ο A είναι δακτύλιος του Artin

Αν $P \in \operatorname{Spec} A$ τότε $P = Q/\langle x(x-1)\rangle$ με $\langle x(x-1)\rangle \subset Q \in \operatorname{Spec} K[x]$

$\Rightarrow \langle x\rangle\langle x-1\rangle \subset Q \Rightarrow \langle x\rangle \subset Q$ ή $\langle x-1\rangle \subset Q$

$\Rightarrow Q = \langle x\rangle$ ή $Q = \langle x-1\rangle$

Άρα $\operatorname{Spec} A = \max\operatorname{Spec} A = \{\langle \bar{x}\rangle, \langle \overline{x-1}\rangle\}$

Από το Θεώρημα έχουμε $A \cong A_{\langle \bar{x}\rangle} \times A_{\langle \overline{x-1}\rangle}$

Τώρα $A_{\langle \bar{x}\rangle} = \left(\dfrac{K[x]}{\langle x(x-1)\rangle}\right)_{\langle \bar{x}\rangle} \cong \dfrac{K[x]_{\langle x\rangle}}{\langle x(x-1)\rangle^e} = \dfrac{K[x]_{\langle x\rangle}}{\langle x\rangle^e}$

$\cong \left(\dfrac{K[x]}{\langle x\rangle}\right)_{\langle \bar{0}\rangle} \cong K$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι $A_{\langle \overline{x-1}\rangle} \cong K$

Άρα $A \cong K \times K$

(2) Έστω $A = K[x]/\langle x^2(x-1)^3\rangle$. Ο A είναι του Artin.

Αν $P \in \operatorname{Spec} A$ τότε $P = Q/\langle x^2(x-1)^3\rangle$ με $Q \in \operatorname{Spec} K[x]$
και $\langle x^2(x-1)^3\rangle \subset Q$

$\Rightarrow \langle x\rangle^2\langle x-1\rangle^3 \subset Q \Rightarrow \langle x\rangle \subset Q$ ή $\langle x-1\rangle \subset Q$

$\Rightarrow Q = \langle x\rangle$ ή $Q = \langle x-1\rangle$

Άρα $\operatorname{Spec} A = \max\operatorname{Spec} A = \{\langle \bar{x}\rangle, \langle \overline{x-1}\rangle\}$

• Απο το Θεώρημα έχουμε
$A/Rad(0) \cong A/\langle \bar{x} \rangle \times A/\langle \overline{x-1} \rangle$

$Rad(0) = \langle \bar{x} \rangle \langle \overline{x-1} \rangle = \langle x(x-1) \rangle / \langle x^2(x-1)^3 \rangle$

Αρα $A/Rad(0) = \dfrac{K[x]/\langle x^2(x-1)^3 \rangle}{\langle x(x-1) \rangle / \langle x^2(x-1)^3 \rangle} \cong K[x]/\langle x(x-1) \rangle$

Επίσης $A/\langle \bar{x} \rangle = \dfrac{K[x]/\langle x^2(x-1)^3 \rangle}{\langle x \rangle / \langle x^2(x-1)^3 \rangle} \cong K[x]/\langle x \rangle \cong K$

$A/\langle \overline{x-1} \rangle = \dfrac{K[x]/\langle x^2(x-1)^3 \rangle}{\langle x-1 \rangle / \langle x^2(x-1)^3 \rangle} \cong K[x]/\langle x-1 \rangle \cong K$

Δηλαδή $K[x]/\langle x(x-1) \rangle \cong K \times K$

Επίσης $A \cong A_{\langle \bar{x} \rangle} \times A_{\langle \overline{x-1} \rangle}$

$A_{\langle \bar{x} \rangle} = \left(K[x]/\langle x^2(x-1)^3 \rangle \right)_{\langle \bar{x} \rangle} \cong \dfrac{K[x]_{\langle x \rangle}}{\langle x^2(x-1)^3 \rangle^e} \cong \dfrac{K[x]_{\langle x \rangle}}{\langle x^2 \rangle^e}$

$\cong \left(K[x]/\langle x^2 \rangle \right)_{\langle \bar{x} \rangle} \cong K[x]/\langle x^2 \rangle$ διότι ο

$K[x]/\langle x^2 \rangle$ είναι τοπικός δακτύλιος του Artin

με μέγιστο ιδεώδες $\langle \bar{x} \rangle$

Επίσης $A_{\langle \overline{x-1}\rangle} = \left(K[x]/\langle x^2(x-1)^3\rangle\right)_{\langle \overline{x-1}\rangle} \cong \dfrac{K[x]_{\langle x-1\rangle}}{\langle x^2(x-1)^3\rangle^e}$

$$\cong \frac{K[x]_{\langle x-1\rangle}}{\langle (x-1)^3\rangle^e} \cong \left(K[x]/\langle (x-1)^3\rangle\right)_{\langle \overline{x-1}\rangle} \cong K[x]/\langle (x-1)^3\rangle$$

διότι ο $K[x]/\langle (x-1)^3\rangle$ είναι τοπικός δακτύλιος Artin

Άρα $A = K[x]/\langle x^2(x-1)^3\rangle \cong A_{\langle \bar{x}\rangle} \times A_{\langle \overline{x-1}\rangle} \cong K[x]/\langle x^2\rangle \times K[x]/\langle (x-1)^3\rangle$

Πόρισμα: Έστω $I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Αν ο δακτύλιος $R = K[x_1, \ldots, x_n]/I$ είναι Artinian τότε $V(I)$ πεπερασμένο. Επιπλέον, αν K αλγεβρ. κλειστό ισχύει και το αντίστροφο και τα μεγιστικά ιδεώδη του R αντιστοιχίζονται στα μεγιστικά ιδεώδη $m_p \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ όπου $p \in V(I)$. Συγκεκριμένα, όταν K αλγεβρ. κλειστό τότε,

R τοπικός Artinian $\Leftrightarrow V(I) = \{p\}$

Αποδ: Έστω R Artinian και $p \in V(I)$

τότε $\mathbb{I}V(I) \subseteq \mathbb{I}(\{p\}) = m_p \in maxspec(K[x_1, \ldots, x_n])$

και $I \subseteq$ ~~m_p~~ $\mathbb{I}V(I) \subseteq m_p$

Άρα $m_p/I \in maxspec(R)$ όπου είναι πεπερασμένα

γιατί R Artinian

Έτσι αφού κάθε $p \in V(I)$ αντιστοιχίζεται σε ένα m_p/I μεγιστικό του R έχω ότι $V(I)$ πεπερασμένο.

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $V(I)$ πεπερ. και K αλγ. κλειστό.

Έστω $P \in spec(K[x_1, \ldots, x_n])$ όπου $I \subseteq P$ ($P/I \in spec(R)$)

τότε $V(P) \subseteq V(I) \Rightarrow V(P)$ πεπερ.

επίσης $V(P)$ ανάγωγο άρα $V(P) = \{p\}$ για κάποιο $p \in V(I)$

Από NSS: $P = \mathbb{I}V(P) = \mathbb{I}(\{p\}) = m_p \in maxspec(K[x_1, \ldots, x_n])$

Άρα κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι και μεγιστικό και αφού $V(I)$ πεπερ. έχω ότι τα m_p είναι πεπερασμένα όπου $I \subseteq m_p$. ~~Άρα έχω~~

Άρα $spec R = maxspec R$ και $|maxspec R| < \infty$

Άρα R Artinian

Σημείωση: ισχύει το αντίστροφο της πρότασης αν K όχι αλγ. κλειστό;

Έστω $A_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[x,y]/\langle x^2+y^2\rangle$ έχω ότι $V(x^2+y^2) = \{(0,0)\}$

όμως $A_{\mathbb{R}}$ όχι Artinian.

Πράγματι, έχω ότι $\langle \bar{0}\rangle \in Spec(A)$ αφού $\langle x^2+y^2\rangle$ πρώτο στο $\mathbb{R}[x,y]$ όμως $\langle \bar{0}\rangle$ όχι μεγιστικό:

$$\langle \bar{0}\rangle \subset \langle x, y^2\rangle / \langle x^2+y^2\rangle \subset A$$

Δεν ισχύει το αντίστροφο

Π.χ

1) $A = \mathbb{R}[x,y]/\langle x^2, xy\rangle$: $V(x^2, xy) = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\}$ άπειρο

Άρα A όχι Artinian

2) $A = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$: Έχω $V(x^2, xy, y^2) = \{(0,0)\}$, $\mathbb{C}$ αλγ. κλειστό

Άρα A τοπικός δακτύλιος Artin

όπου το μοναδικό μεγιστικό του είναι το $m_{(0,0)} = \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$

Λήμμα

Έστω I ιδεώδες του $K[x_1,..,x_s]$.

1) Αν ο $K[x_1,..,x_s]/I$ είναι πεπερ. διάστασης δ.χ. πάνω από το K, τότε

$$\#\mathbb{V}(I) \leq \dim_K K[x_1,..,x_s]/I.$$

(Ειδικότερα, $\#\mathbb{V}(I) < \infty$)

2) Αν το K αλγεβρικά κλειστό, τότε το $\mathbb{V}(I)$ πεπερασμένο ανν $\dim_K K[x_1,..,x_s]/I < \infty$.

Απόδειξη

1) Έστω $p_1,..,p_r \in \mathbb{V}(I)$. Επιλέγουμε $f_1,..,f_r \in K[x_1,..,x_s]$ ώστε:

$$f_i(p_j) = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i\neq j \end{cases}$$

Επίσης, $\bar{f_i} = f_i + I \in K[x_1,..,x_s]/I$, $i=1,..,r$.
Θα δείξουμε ότι τα $\bar{f_i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και τότε $r \leq \dim_K K[x_1,..,x_s]/I$ και άρα πεπερασμένο.

Έστω λοιπόν $\lambda_i \in K$, $i=1,..,r$, με $\sum_i \lambda_i \bar{f_i} = \bar{0}$. Τότε $\sum_i \lambda_i f_i \in I \Rightarrow \exists g \in I$ τ.ω. $\sum_i \lambda_i f_i = g$.
Επομένως,

$$\sum_i \lambda_i f_i(p_j) = g(p_j) \Rightarrow \lambda_j = g(p_j) \overset{\circledast}{=} 0 \quad , j=1,..,r$$

($\circledast$ $g \in I$, $p_j \in \mathbb{V}(I)$).

2) Τώρα K αλγ. κλειστό, η "$\Leftarrow$" άμεση από το (1) και θα δείξουμε το "$\Rightarrow$".
Έστω λοιπόν $V(I)=\{p_1,\dots,p_r\}$ με $p_i=(a_{i1},\dots,a_{is})$.
Ορίζουμε

$$f_j := \prod_{i=1}^{r}(x_j-a_{ij}) = (x_j-a_{1j})\cdots(x_j-a_{rj}) \quad , j=1,\dots,s$$

Παρατηρούμε ότι $f_j(p_i)=0$, $\forall i=1,\dots,r$
Επομένως $f_j\in \mathbb{I}(V(I)) = Rad(I) \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: f_j^N\in I$.
Μπορούμε να επιλέξουμε N αρκετά μεγάλο ώστε $f_j^N\in I$ $\forall j=1,\dots,s$.
Έχουμε:

$$\bar{f}_j^N = (x_j-a_{1j})^N\cdots(x_j-a_{rj})^N + I = \bar{0}$$

και άρα το $\bar{x}_j^{rN}$ γράφεται ως K-γρ. συνδυασμός των $\bar{1},\bar{x}_j,\dots,\bar{x}_j^{rN-1}$

Επιπλέον, δείχνουμε ότι $\bar{x}_j^{\ell}$ γράφεται ως K-γρ.σ. των $\bar{1},\bar{x}_j,\dots,\bar{x}_j^{rN-1}$, $\forall \ell$.

Επομένως, $\{\bar{1},\bar{x}_j,\dots,\bar{x}_j^{rN-1}, j=1,\dots,s\}$ παράγει τον $K[x_1,\dots,x_s]/I$. ∎

Πόρισμα
Έστω $R=K[x_1,\dots,x_s]/I$, K αλγ. κλειστό. Τότε:

$$\boxed{R \text{ Artinian} \Leftrightarrow \dim_K R<\infty}$$

Π.χ.

$$R = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2,xy,y^2\rangle = \mathbb{C}[\bar{x},\bar{y}]$$

Βάση του R: $\{\bar{1},\bar{x},\bar{y}\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} R = 3<\infty$, επομένως ο R είναι Artinian.

Πρόταση

Έστω $I \trianglelefteq K[x_1,\dots,x_s]$, $A = K[x_1,\dots,x_s]/I$ Artinian.
Τότε $\dim_K A < \infty$.

Απόδειξη

Από θεώρημα κανονικοποίησης της Noether, υπάρχει ομομ. δακτυλίων $R = K[y_1,\dots,y_r] \hookrightarrow A$, $0 \leq r \leq s$, και ο A γίνεται π.π. R-module.

Από το θεώρημα επικάλυψης, κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι προεικόνα πρώτου ιδεώδους του A.
Αν $r \geq 1$, ο R έχει άπειρα πρώτα ιδεώδη, ενώ ο A πεπ. πλήθους.
Επομένως, $r=0$, $R=K$ και $\dim_K A < \infty$. ∎

• Έστω $A=K[x_1,..,x_n]/_I$ δακτύλιος του Artin με $\mathrm{Spec}A=\{m_1,..,m_n\}$. Είδαμε ότι τα μέγιστα ιδεώδη m_i αντιστοιχούν σε σημεία του $V(I)$ το οποίο έχει πλήθος το πολύ $\dim_K A$.
Άρα $\#\mathrm{Spec}A=n \le \dim_K A$

Ορίζουμε τον βαθμό του SpecA ως:
$\deg \mathrm{Spec}A=\dim_K A$

Τότε ισχύει $\deg\mathrm{Spec}A=\sum_{i=1}^{n}\deg\mathrm{Spec}A_{m_i}$ διότι

$$\deg\mathrm{Spec}A=\dim_K A=\dim_K(A_{m_1}\times\cdots\times A_{m_n})=\sum_{i=1}^{n}\dim_K A_{m_i}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\deg\mathrm{Spec}A_{m_i}$$

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Έστω $A=K[x]/_{\langle x(x-1)\rangle}$. Είδαμε ότι $A\cong A_{\langle\bar{x}\rangle}\times A_{\langle\overline{x-1}\rangle}$

με $A_{\langle\bar{x}\rangle}\cong K$ και $A_{\langle\overline{x-1}\rangle}\cong K$
Άρα $\dim_K A_{\langle\bar{x}\rangle}=\dim_K A_{\langle\overline{x-1}\rangle}=1$ και $\dim_K A=2$

Άρα $\deg\mathrm{Spec}A=2$

(2) Έστω $A=K[x]/_{\langle x^2(x-1)^3\rangle}$. Είδαμε $A\cong A_{\langle\bar{x}\rangle}\times A_{\langle\overline{x-1}\rangle}$

με $A_{\langle\bar{x}\rangle}\cong K[x]/_{\langle x^2\rangle}$ και $A_{\langle\overline{x-1}\rangle}\cong K[x]/_{\langle x-1\rangle^3}$

Το $\{1+\langle x^2\rangle, x+\langle x^2\rangle\}$ αποτελεί βάση του $A_{\langle\bar{x}\rangle}$ ως K-δ.χ και άρα $\dim_K A_{\langle\bar{x}\rangle}=2$

Το $\{1+\langle x-1\rangle^3, x+\langle x-1\rangle^3, x^2+\langle x-1\rangle^3\}$ αποτελεί βάση του $A_{\langle \overline{x-1}\rangle}$. Άρα $\dim_k A_{\langle \overline{x-1}\rangle} = 3$

Άρα $\deg \operatorname{Spec} A = \dim_k A = \dim_k A_{\langle \bar{x}\rangle} + \dim_k A_{\langle \overline{x-1}\rangle} = 2+3=5$

(3) Έστω $A = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle = \mathbb{C}[x,y]/\langle x,y\rangle^2$

Ο A είναι τοπικός δακτύλιος του Artin με μέγιστο ιδεώδες το $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$

Το $\{1+\langle x,y\rangle^2, x+\langle x,y\rangle^2, y+\langle x,y\rangle^2\}$ αποτελούν βάση του A ως $\mathbb{C}$-δ.χ άρα $\dim_k A = 3$
$\Rightarrow \deg \operatorname{Spec} A = 3$