Όπως έχουμε δει στο Μάθημα γενικά για $W \subseteq V$ (↳ αναγ.)
αλγεβρικά σύνολα ισχύει η σχέση :

$$\boxed{\dim V \geq \dim W + \operatorname{codim}_V W}$$

Στόχος Παρουσίασης

Να δείξουμε ότι όταν $W \subseteq V$ <u>ανάγωγα</u> αλγεβρικά ισχύει η ισότητα, δηλ. $\dim V = \dim W + \operatorname{codim}_V W$.

→ Θα αναφέρουμε τα εργαλεία που θα μας οδηγήσουν στο στόχο μας.

Ορολογία : Έστω R δακτ.

Μία αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του R, $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$ λέγεται <u>maximal</u> όταν δεν μπορεί να εκλεπτυνθεί άλλο, δηλαδή δεν μπορούμε να "παρεμβάλλουμε" άλλο πρώτο ιδεώδες γνήσια ανάμεσα σε δύο ή στα άκρα της.

Σημείωση : Οι maximal αλυσίδες ενός δακτυλίου <u>δεν</u> έχουν κατ' ανάγκη όλες το ίδιο μήκος.

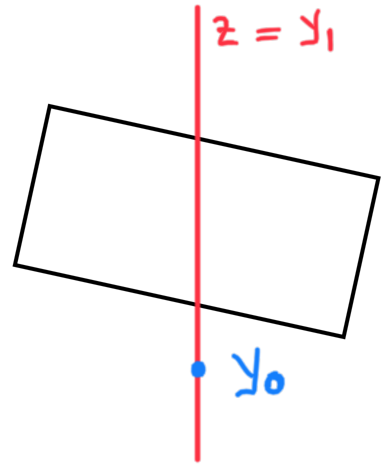
Παράδειγμα (από Αλγ. Γεωμετρία)

$X = \mathbb{V}(xz, yz) \subset \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{V}(z) \cup \mathbb{V}(x,y) \subseteq \mathbb{R}^3$

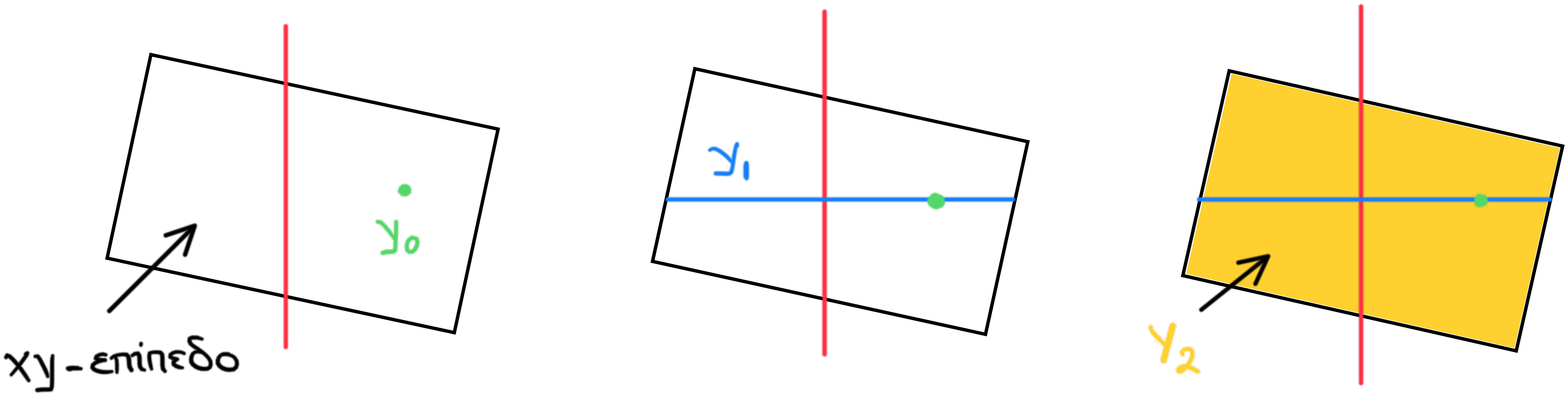
$$\left.\begin{aligned} xz &= 0 \\ yz &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{z = 0}_{\mathbb{V}(z)} \text{ ή } \underbrace{x = y = 0}_{\mathbb{V}(x,y)} \quad , \subseteq \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{V}(z)$ ↑ xy - επίπεδο

$\mathbb{V}(x,y)$ ↑ z - άξονας.



$$\boxed{\; Y_0 \subsetneq Y_1 = z\text{-άξονας} \;} \quad (α)$$



$$\boxed{\; Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_2 \;} \quad (b)$$

Και η (α) & η (b) είναι maximal αλυσίδες αλγεβρ. υποσυνόλων του V. (& αντιστ. σε maximal πρ. αλ. του $\mathbb{R}[V]$ αφού τα Y_i αναγ. ($\underbrace{I(Y_i)}_{\text{πρ.}} \supseteq I(V)$))

<u>Λήμμα</u>

Έστω R δακτ., $\dim R < \infty$ & όλες οι maximal αλυσίδες πρώτων ιδ. του R έχουν <u>ίδιο</u> μήκος & έστω $P \in \operatorname{Spec}(R)$:

(α) $\dim(R/P) < \infty$ και όλες οι maximal αλ. πρ. ιδ. του R/P έχουν ίδιο μήκος.

(b) $\dim R = \underline{\dim(R/P)} + ht(P)$

(c) $\dim R_P = \dim R$, αν $P \in \operatorname{maxSpec}(R)$.

Απόδειξη $\quad \dim R < \infty \implies \dim(R/P) < \infty$

πρ. αλ. στον R/P

$$\underbrace{\frac{Q_0}{P} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \frac{Q_r}{P}}_{\dim(R/P) \geq r}, \quad Q_i \in \operatorname{Spec}(R),\ P \subseteq Q_i.$$

$$P = Q_0 : \quad \underbrace{\underbrace{P_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_m}_{ht(P) \geq m} = P = \underbrace{Q_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_r}_{}}_{m+r = \dim R.}$$

$$\dim R \geq \dim(R/P) + ht(P) \geq r + m = \dim R.$$

1) ισχύει η ισότητα $\quad$ (b)✓

2) $\dim(R/P) = r \quad$ (α)✓

(c) $P \in \operatorname{maxSpec}(R) \iff R/P$ σώμα

$\dim(R/P) = 0$

(b) $\dim R = ht(P) = \dim R_P$. $\quad$ (✓)

Έχουμε αποδείξει στο Μάθημα ότι για $\mathbb{K}$ σώμα & $n \in \mathbb{N}$
$\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = n$.
Για τον πολυωνυμικό δακτύλιο όμως αποδεικνύεται και κάτι ισχυρότερο.

Πρόταση

Έστω $\mathbb{K}$ σώμα & $n \in \mathbb{N}$:

(α) $\dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = n$

(b) Όλες οι maximal αλυσίδες πρώτων ιδ. του $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ έχουν μήκος n.

Απόδειξη Στόχου

Έστω $W \subseteq V$ ανάγωγα αλγ. υποσύνολα του $\mathbb{K}^n$.
Τότε $\dim V = \dim W + \operatorname{codim}_V W$.

Απόδειξη

$\dim V = \dim \mathbb{K}[V]$, $\mathbb{K}[V] = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathbb{I}(V)}$ ← πρώτο

Από Πρόταση (το (b)) & Λήμμα (το (α)) έχουμε ότι όλες οι maximal αλυσ. πρ. ιδ. του $\mathbb{K}[V]$ έχουν το ίδιο μήκος & $\dim \mathbb{K}[V] < \infty$ & άρα από Λήμμα (το (b)) για τον $\mathbb{K}[V]$ έχουμε: ($\mathbb{I}(W) \supseteq \mathbb{I}(V)$, $\mathbb{I}(W)$ πρώτο)

$$\dim \mathbb{K}[V] = \dim \frac{\mathbb{K}[V]}{\mathbb{I}(W)}^{(1)} + ht(\mathbb{I}(W))^{(2)}$$ & άρα

$$\dim V = \dim W + \operatorname{codim}_V W$$

(1) $\dfrac{\mathbb{K}[V]}{\mathbb{I}(W)} \cong \mathbb{K}[W]$

(2) $ht(\mathbb{I}(W)) = \operatorname{codim}_V W$

Ο υπερβατικός βαθμός μίας επέκτασης σωμάτων και η σχέση του με τη διάσταση(Krull) μίας πεπερασμένα παραγόμενης Κ-άλγεβρας.

Ορισμός: Έστω $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ επέκταση σωμάτων και $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{E}$.

- Το $\mathcal{B}$ καλείται **αλγεβρικώς ανεξάρτητο** πάνω από το $\mathbb{K}$, αν για οποιαδήποτε επιλογή πεπερασμένου το πλήθος στοιχείων του $\mathcal{B}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, με $n \in \mathbb{N}$, το μοναδικό πολυώνυμο n-μεταβλητών , με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, που μηδενίζεται στο $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ είναι το μηδενικό.Ειδάλλως, το $\mathcal{B}$ καλείται αλγεβρικώς εξαρτημένο.Το κενό σύνολο είναι αλγεβρικώς ανεξάρτητο πάνω από οποιοδήποτε σώμα.

- Το $\mathcal{B}$ καλείται **υπερβατική βάση** του $\mathbb{E}$ πάνω από το $\mathbb{K}$ (ή της επέκτασης $\mathbb{E}/\mathbb{K}$) , αν το $\mathcal{B}$ είναι αλγεβρικώς ανεξάρτητο πάνω από το $\mathbb{K}$ και η επέκταση σωμάτων $\mathbb{E}/\mathbb{K}(\mathcal{B})$ είναι αλγεβρική, όπου $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ το μικρότερο σώμα που περιέχει τα $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$.

$$\mathbb{K}(\mathcal{B}) = \left\{ \frac{f(a_1, \dots, a_n)}{g(a_1, \dots, a_n)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathcal{B}, f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], g \neq 0 \right\}.$$

Σχόλια: Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι μία βάση ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου είναι ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο που ταυτόχρονα είναι και ελαχιστικό παράγον σύνολο του γραμμικού χώρου.Επίσης είναι γνωστό ότι σε κάθε γραμμικό χώρο υπάρχει βάση που εν γένει δεν είναι μοναδική,αλλά αυτό που διατηρείται σε κάθε βάση ενός γραμμικού χώρου είναι το πλήθος των στοιχείων της, και χάρις τη τελευταία ιδιότητα, η έννοια της διάστασης ενός γραμμικού χώρου πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$ προέκυψε φυσιολογικά . Ανάλογα πράγματα ισχύουν για την υπερβατική βάση μίας επέκτασης σωμάτων και θα τα παρουσιάσουμε συνοπτικά :

Έστω $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ επέκταση σωμάτων:

- Υπάρχει **πάντα** υπερβατική βάση του $\mathbb{E}$ πάνω από το $\mathbb{K}$.
  (Περιληπτικά, η απόδειξη οφείλεται στο λήμμα του Zorn, θεωρώντας το σύνολο $\mathcal{A}$={ $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{E}$| $\mathcal{B}$ *αλγεβρικώς ανεξάρτητο πάνω από το* $\mathbb{K}$} $\neq \emptyset$.)

Μάλιστα, αν $\mathcal{B}$ είναι ένα αλγεβρικώς ανεξάρτητο σύνολο πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{E}$,τ.ω. η επέκταση $\mathbb{E}/\mathbb{K}(\mathcal{C})$ είναι αλγεβρική τότε το $\mathcal{B}$ μπορεί αν επεκταθεί σε κάποιο υποσύνολο του $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ τ.ω. το επεκταμένο $\mathcal{B}$ να είναι υπερβατική βάση της αρχικής επέκτασης.
(Θεωρούμε το παρακάτω σύνολο και εφαρμόζουμε το λήμμα του Zorn
$\mathcal{A}$={ $T \subseteq \mathbb{E}$| T *αλγεβρικώς ανεξάρτητο πάνω από το* $\mathbb{K}$ *και* $\mathcal{B} \subseteq T \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ })

- Οποιεσδήποτε δύο υπερβατικές βάσεις της επέκτασης $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων(με την έννοια του μέτρου card(.) στον μετρίσιμο χώρο $(\mathbb{E}, \mathcal{P}(\mathbb{E}))$.Ειδικώτερα, αν $\mathcal{B}$ είναι μία υπερβατική βάση της παραπάνω επέκτασης με πληθάριθμο κάποιο φυσικό n τότε ορίζουμε το **βαθμό υπερβατικότητας** του $\mathbb{E}$ πάνω από $\mathbb{K}$ (ή **υπερβατικός βαθμός** της επέκτασης $\mathbb{E}/\mathbb{K}$), να είναι ακριβώς αυτός ο αριθμός και συμβολίζεται $\boldsymbol{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{E}$.Ειδάλλως, θέτουμε $\boldsymbol{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = \infty$.
(Δείχνουμε πρώτα για πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{B}$ και θεωρούμε μία άλλη τυχούσα υπερβατική βάση.Κάνουμε επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{B}$.)

Παρατήρηση: Μία υπερβατική βάση της επέκτασης $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ είναι ένα μεγιστικό αλγεβρικώς ανεξάρτητο σύνολο .Κάθε άλλο στοιχείο, α του $\mathbb{E}$ είναι (εξ'ορισμού) αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ και κατά συνέπεια το $\mathcal{B} \cup \{\alpha\}$ είναι αλγεβρικώς εξαρτημένο πάνω από το $\mathbb{K}$. Επιπλέον παράγει το <<υπερβατικό κομμάτι >> της επέκτασης ,με την έννοια ότι οποιοδήποτε ενδιάμεσο σώμα ανάμεσα στο $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ και το $\mathbb{E}$ είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{K}(\mathcal{B})$.

Παράδειγμα: $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ και το σώμα κλασμάτων του….

$$Q(\mathcal{R}) = \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \,\middle|\, f, g \in \mathcal{R}, g \neq 0 \right\} = \mathbb{K}(\mathcal{B})$$

$\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$. - εξ' ορισμού, $Q(\mathcal{R}) / \mathbb{K}(\mathcal{B})$ αλγεβρικό

$\Rightarrow \mathcal{B}$ - υπερβ. βάση του $Q(\mathcal{R}) / \mathbb{K}$. $\Rightarrow$

$$\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} Q(\mathcal{R}) = |\mathcal{B}| = n = \dim(\mathcal{R})$$

Έχοντας τώρα ορίσει τον υπερβατικό βαθμό μίας επέκτασης σωμάτων , είμαστε σε θέση να αναφέρουμε (και γιατί όχι) να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα!

Θεώρημα: Έστω $\mathcal{R}$ μία πεπερασμένα παραγόμενη $\mathbb{K}-$ άλγεβρα που είναι και ακέραια περιοχή (όπου $\mathbb{K}$ ένα άπειρο σώμα). Τότε

$$dimR = \boldsymbol{trdeg}_{\mathbb{K}} Q(\mathcal{R})$$

Απόδειξη: $\exists n \in \mathbb{N}$, $I \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, τ.ω

$R \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$, R - Α.Π. $\Rightarrow I$ - πρώτο.

$\dim(R) = m \leq n$: $\exists z_1, \ldots, z_m \in R$, τ.ω

$\underset{\cong}{\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_m]} \subset R$ ακέραια

$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$

$\mathbb{K}(z_1, \ldots, z_m) \leq Q(R)$, Έστω $c \in Q(R)$,

$\Rightarrow c = \frac{a}{b}$, $a, b \in R$, $b \neq 0$,

$\Rightarrow f, g \in (\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_m])[x]$.

με $f(a) = g(b) = 0$, $\Rightarrow$

$f, g \in (\mathbb{K}(z_1, \ldots, z_m))[x]$, με $f(a) = g(b) = 0$

$\Rightarrow a, b$ - αλγεβρικά

$\mathbb{K}(z_1$