Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Τέταρτο Σύνολο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 16-1-2022

Οδηγίες: Να επιλέξετε 8 από τις ασκήσεις.

1. Υλοποιήστε το Θεώρημα κανονικοποίησης της Noether στις παρακάτω περιπτώσεις
   (α') $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2 - y^3\rangle$.
   (β') $R = \mathbb{C}[x,y,z,w]/\langle xy - zw\rangle$
   (γ') $R = \mathbb{R}[x,y,z]/\langle x - yz, y^2 - xy + z^2\rangle$. Ποιά είναι η διάσταση τού $\mathbb{V}(\langle x - yz, y^2 - xy + z^2\rangle$;

2. (α') Έστω $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ανάγωγο πολυώνυμο. Δείξτε, χωρίς την χρήση τού Krull's Principal Ideal Theorem, ότι $\operatorname{codim}_{k^n} \mathbb{V}(f) = 1$.
   (β') Έστω $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ οποιοδήποτε πολυώνυμο. Δείξτε, χωρίς την χρήση τού Krull's Principal Ideal Theorem, ότι $\operatorname{codim}_{k^n} \mathbb{V}(f) = 1$.

3. Έστω $R = k[x,y]/\langle xy\rangle$.
   (α') Δείξτε ότι $\operatorname{ht}(\langle \overline{x}\rangle) = 0$.
   (β') Δείξτε ότι $\operatorname{ht}(\langle \overline{x-1}\rangle) = 1$.
   (γ') Ερμηνεύσατε γεωμετρικά το γιατί οι παραπάνω τιμές των υψών είναι διαφορετικές.

4. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύνολο $V = \{(t, t^2, t^3), t \in k\} \subset k^3$. Δείξτε ότι $\dim V = 1$ με τούς εξής τρόπους:
   (α') Δείξτε ότι το V είναι ισόμορφο (ως αλγεβρικό σύνολο) με το k και συμπεράνετε ότι $\dim V = 1$.
   (β') Κάνετε χρήση τού Θεωρήματος κανονικοποίησης τής Noether για να συμπεράνετε ότι $\dim V = 1$.

5. Δείξτε ότι οι παρακάτω δακτύλιοι είναι τοπικοί δακτύλιοι τού Artin:
   (α') $R = k[x]/\langle x^n\rangle,\ n \in \mathbb{N}$.
   (β') $R = k[x,y]/\langle (x-1)^n, (y-2)^m\rangle,\ n, m \in \mathbb{N}$.
   (γ') $R = k[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle,\ n, m \in \mathbb{N}$.

6. Έστω $R = \mathbb{C}[x,y]/I$, με $I = \langle xy - 1, x^2 + y^2\rangle$.
   (α') Βρείτε το $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{C}^2$.
   (β') Με τη χρήση τού παραπάνω ερωτήματος, δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες τού R είναι και μέγιστο και συμπαράνατε ότι ο R είναι δακτύλιος του Artin.

7. Έστω $R \subseteq S$ επέκταση δακτυλίων με τον S ακέραιο πάνω από τον R. Δείξτε ότι αν $I \neq \langle 0\rangle$ ιδεώδες τού S τότε $I \cap R \neq \langle 0\rangle$.

8. Να αποδείξετε λεπτομερώς ότι ο δακτύλιος του παραδείγματος 8.1.1.13 του βιβλίου έχει άπειρη διάσταση. Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένο το Θεώρημα 3.1.6.

9. Να βρείτε τη διάσταση του $\dim \mathbb{C}[x, x^{-1}]$.

10. Έστω $R = \mathbb{C}[[x_1, x_2, x_3]]/\langle x_1^2, x_2^2, x_2x_3\rangle$. Να βρείτε $\dim R$. Για το ιδεώδες $P = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\rangle$ να βρείτε $a_1, \ldots, a_n$, για $n = \operatorname{ht} P$, τέτοια ώστε $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subset P$ ελαχιστοτικά.