→ **Λημμα 1.** R δ. Noether. $\mathfrak{a} \in \mathrm{Spec}(R)$. Τοτε

$$\mathfrak{a}^{(n)} := \mathfrak{a}^n R_{\mathfrak{a}} \cap R \trianglelefteq R$$

ειναι $\mathfrak{a}$-πρωταρχικο.

***Σημειωση.** $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{a}^{(n)} \trianglelefteq R$

→ **Λημμα 2**

$$\mathfrak{a}^{(n)} R_{\mathfrak{a}} \overset{(1)}{=} \mathfrak{a}^n R_{\mathfrak{a}} \overset{(2)}{=} (\mathfrak{a} R_{\mathfrak{a}})^n$$

Απ

απλη. — ασκηση

→ **Λημμα 3.**

Εστω (R, P) τοπικος δ. αυτυλιος.

Αν $P^n = 0 \Rightarrow \dim R = 0$ για καποιο $n \in \mathbb{N}$

Απ

Εστω $P' \in \mathrm{Spec}(R)$. Τοτε $P' \subset P$. Επισης $P^n = 0 \subset P'$.

$\Rightarrow P \subset P' \Rightarrow$ (1)

$P = P' \Rightarrow \dim R = 0$ ■

Προτασn Εστω $\mathfrak{a} \in \mathrm{Spec} R$

Αν $\mathfrak{a}^n R_{\mathfrak{a}} = 0$ τοτε $\mathrm{ht}\,\mathfrak{a} = 0$

Απ

Αρκει να δειξουμε οτι

$\dim R_{\mathfrak{a}} = 0$

$(R_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a} R_{\mathfrak{a}})$ τοπικος.

Απο το Λημμα 3. αρκει να δειξουμε οτι $\exists\ n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$(\mathfrak{a} R_{\mathfrak{a}})^n = 0$$

μεγιστο ιδεωδες $R_{\mathfrak{a}}$

Απο το λημμα 2.

$(\underline{aRa})^n = a^n Ra.$

<u>Θεωρημα</u> Απ. Πρ. Ιδ.
(prime avoidance theorem).

$A \triangleleft R$ και $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_n$

$P_i \in Spec(R)$ για $i = 1, \dots, n$

τοτε $\exists\ 1 \le t \le n$ τ.ω. $A \subset P_t$

<u>Απ</u>

$n = 1$ ✓ $(A \subset P_1)$

Εστω οτι ισχυει για $n-1$.

Θα αποδειξουμε για n.

$A \subset P_1 \cup \dots \cup P_n$.

Αν A περιεχεται στην

ενωση $n-1$ πρωτων ιδεωδων απο τα P_i

τοτε απο την υποθεση της επαγωγης, το A θα περιεχεται σε ενα απο τα P_i.

Αρα μενει να εξετασουμε την περιπτωση που

$A \not\subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} P_i$, για καθε $j = 1, \dots, n$

$\left(\begin{array}{l} A \not\subset P_2 \cup \dots \cup P_n \\ A \not\subset P_1 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n \end{array} \right)$

Επομενως

$\exists\ f_j \in A$ και $f_j \notin \bigcup_{i \neq j} P_i$

<u>Αρα</u> $f_j \in P_j$ και $f_j \notin P_i$, $i \neq j$.

③

$$g_j = \prod_{i \neq j} f_i$$

Εστω $i \neq j \Rightarrow g_j \in P_i$
$g_j \in A$

και $g_j \notin P_j$

(αφου P_j ειναι πρωτο ιδεωδες!)

Θεωρουμε

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \in A$$

($A \triangleleft R$ κ' $g_i \in A$)

Αφου $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_n$

$\exists\, t : g \in P_t$

$$\underset{\in P_t}{\cancel{g}} - \underbrace{\sum_{i \neq t} g_i}_{\in P_t} = \underbrace{g_t}_{\notin P_t}$$

$\rightarrow \leftarrow$

Αρα $A \subset P_i$ για καποιο i $i=1,\dots,n$

Θεωρημα R δ. Noether $P \in Spec(R)$

$x \neq 0$ τ.ω. $\langle x \rangle \subset P$ ελαχιστοτη

Τοτε

$$ht(P) \leq 1$$

Απ

- Αν $ht(P) = 0$ ✓
- Εστω οτι $ht(P) \neq 0$

κ' εστω $Q \subsetneq P$

(πρεπει να δειξουμε οτι $ht\, Q = 0$)

$\langle x \rangle \not\subset Q$ (αφου διαφορετικα θα ειχαμε

$\langle x \rangle \subset Q \subsetneq P$ $\to \leftarrow$)

και αρα $x \notin Q$.

Περνωντας στον R_P παρατηρουμε οτι

$QR_P \in Spec(R_P)$

$QR_P \neq PR_P$

$\langle x \rangle R_Q \subset PR_P$ ελαχιστοτικα

και αν

$ht\, QR_P = 0 \Longleftrightarrow$

$ht\, Q = 0$

Αρκει λοιπον να αποδειξουμε το θεωρημα οταν P ειναι το μοναδικο μεγιστο ιδεωδες του R.

(R, P).

(5)

$R' = R/\langle x \rangle$

$\mathrm{Spec}(R') = \left\{ P/_{\langle x \rangle} \right\}$

R' δ. Noeth., $\dim R' = 0$

Αρα R' δ. Artin.

και

καθε φθινουσα ακολουθια ιδεωδων του R' γινεται στατικη.

Παρατηρουμε

$$a^{(n)} \supseteq a^{(n+1)}$$

Αρα

$$a^{(1)} + (x) \supset a^{(2)} + (x) \supset \cdots \supset a^{(n)} + (x).$$

$$\left\{ \left(a^{(i)} + (x)\right)/_{(x)} : i \in \mathbb{N} \right\}$$

φθινουσα ακολουθια ιδεωδων στον R'

Αφου R' ειναι δ. Artin

$\exists\ n$ τ.ω.

$$a^{(n)} + (x)/_{(x)} = a^{(n+1)} + (x)/_{(x)}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{a^{(n)}+(x)}{} = a^{(n+1)}+(x)$$

$\Rightarrow$

$$a^{(n)} \subset a^{(n+1)}+(x).$$

άρα
αν $b \in a^{(n)}$, $\exists \gamma \in a^{(n+1)}$
και $s \in R$ τ.ω.

$$b = \gamma + \underbrace{sx}_{a^{(n)}} \Rightarrow$$

$a^{(n)} \ni b-\gamma = sx$ δηλ.

$sx \in a^{(n)}$

$x \notin Q = rad(a^{(n)})$

$a^{(n)}$ Q-πρωταρχικό

$\Rightarrow s \in a^{(n)}$

$\Rightarrow$

$$\underline{a^{(n)}} = a^{(n+1)} + a^{(n)}(x)$$

$\subset a^{(n+1)} + a^{(n)}P \subset a^{(n)}.$

Άρα

$a^{(n)} = a^{(n+1)} + a^{(n)}P$

Όμως (R,P) τοπικός, $a^{(n)}$ π.π.

Λ. NAK $\Rightarrow$

$$a^{(n)} = a^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow a^{(n)}R_a = a^{(n+1)}R_Q$$

$$(aR_a)^n = (aR_a)(aR_a)^n$$

Λήμμα NAK.

R_Q με μεγιστο ιδεωδες

aR_Q

$\Rightarrow a^{(n)} R_Q = 0$

Αρα $a^n R_Q = 0$

(λημμα 2).

$\Rightarrow ht\, Q = 0$!

~~ΘΕΩΡΗΜΑ~~

Αν $ht(P) = 1$ τοτε

$\exists \; x \in P$ τ.ω

$\langle x \rangle \subset P$
ελαχιστοτ

Γενικευση

Αν R δ. Noether

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset P$
ελαχιστ.

$P \in Spec(R)$ τοτε

$ht\, P \leq n$

Αντιστροφα αν $ht(P) = n$ υπαρχουν

$x_1, \dots, x_n \in P$ τ.ω.

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset P$
ελαχιστ.

(k= αλγ. κλειστό) $V \subseteq k^m$ αλγ. σύνολο.

$$\dim V = \sup r. \{ n, \underbrace{Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n}_{\text{ανάγωγα αλγ. υποσύνολα}} \subseteq V \}$$

$$\dim V = \dim k[V]$$

π.χ $\dim\{pt\} = 0$ $V = \{pt\}$

π.χ $V = k$ $\dim k$: Ανάγωγα k, $\{pt\}$: $\{pt\} \subsetneq k$, άρα $\dim k = 1$.

π.χ. $\underbrace{\dim k^2}_{\text{δύσκολο να υπολογιστεί αλγεβρικά.}} = \dim \underbrace{k[k^2]}_{k[x,y]} = 2$ ...... ↳ από πρόταση.

• $W \subseteq V$ αλγεβρικά σύνολα τότε $\dim W \le \dim V$.

άρα αν $V \subseteq k^m$ αλγεβρικό τότε $\dim V \le \dim k^m = m$.

άρα αν V αλγεβρικό τότε $\dim V = n < \infty$ άρα $\exists$ αλυσίδα

$$(*) \quad Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq V \quad , \quad Y_i \text{ ανάγωγα αλγεβρικά.}$$

⇝ <u>Πρόταση:</u> Έστω $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$, διάσπαση σε ανάγωγες συνιστώσες. Τότε $\underset{\substack{\| \\ n}}{\dim V} = \underbrace{\max_i (\dim V_i)}_{= n'}$.

<u>Αποδ.</u>

- $n' \geq n$: Παίρνω την $(*)$ που υλοποιεί την $\dim V$: τότε $Y_n = Y_n \cap V = (Y_n \cap V_1) \cup \cdots \cup (Y_n \cap V_r)$. Όμως Y_n ανάγωγο άρα $\exists\, i$ με $Y_n = Y_n \cap V_i$ άρα $Y_n \subseteq V_i$ άρα έχω

$$Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq V_i \Rightarrow \dim V_i \geq n \Rightarrow n' \geq n.$$

- $n \geq n'$: Έχω $n' = \dim V_i$, κάποιο i. Παίρνω $(**) \quad Y_0' \subseteq \cdots \subseteq Y_{n'}' \subseteq V_i$ αλυσίδα αναγώγων αλγεβρικών. Επειδή $V_i \subseteq V \Rightarrow (**)$ ——"—— του V $\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ n}}{\dim V} \geq n'$.

Αλγεβρικό ανάλογο: αν $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ διάσπαση σε ανάγωγα

τότε $\mathbb{I}(V_1) = p_1, \dots, \mathbb{I}(V_n) = p_n$ ελαχιστοτικά πρώτα ιδεώδη του $k[V]$.

Έχουμε $\dim V = \dim k[V] = \max_i \dim k[V_i]$ $\left(k[V_i] = k[V]/p_i \right)$

δείτε το!!

Υπενθύμιση: $\left\{ \begin{array}{l} \text{αλγ. υποσύνολα } V \\ \text{ανάγ. υποσύνολα } V \end{array} \right\}$ $\begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \end{array}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ειδικά ιδεώδη του } k[V] \\ \text{πρώτα ιδεώδη του } k[V] \end{array} \right\}$

$\dim k[V]$ υλοποιείται από πρώτες αλυσίδες της μορφής

$$q_0 \subseteq q_1 \subseteq \dots \subseteq q_n$$

(αν $q_0 = p_i$, τότε αυτό επάγει αλυσίδα στο $k[V_i]$.)

ελαχιστοτικό πρώτο.

$\rightsquigarrow$ γεωμ. ερμηνεία ύψους $\longleftrightarrow$ συνδιάσταση αλγ. υποσυνόλου σε αλγ. σύνολο.