πρωτη ακολουθια μηκους n
αλυσιδα

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$

$P_i \in Spec(R)$

$ht(P) = \sup\{n :$ n μηκος πρωτης αλυσιδας που καταληγει στο $P\}$

$P \in Spec(R)$

$$\dim R = \sup\{ht(P) : P \in Spec(R)\}$$

$I \underset{\neq}{\triangleleft} R$ (υψος του I)

$ht(I) = \inf\{ht(P) : I \subset P$, ελαχιστοι, οπου $P \in Spec(R)\}$

$= \inf\{ht(P) : I \subset P, P \in Spec(R)\}$

R δ. της Noether

<u>Ερωτημα</u> Ειναι $ht(P_i)$ $\forall P \in Spec(R)$, γενικοτερα $ht(I)$, $\dim R$ πεπερασμενα?

Παραδειγμα (Nagata)
R δ. Noether, $\dim(R) = \infty$

ΘΕΩΡΗΜΑ

R δ. Noether, (R, P) τοπικος δακτυλιος
Τοτε
$\dim(R) = \min\{\sqrt{}(I) :$ I ειναι P-πρωταρχικο ιδεωδες$\}$

οπου
$\sqrt{}(I) =$ ο ελαχιστος αριθμος γεννητορων του I.

<u>Παρατηρηση</u>

I ειναι π.π. R-module. (R δ. Noether).

αν $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ παραγουν το I/pI ως R/p - δ.χ.

τοτε τα $a_1, \dots, a_n$ παραγουν το I ως R-module.

δηλ $v(I) = \dim_{R/p}(I/pI)$

και μαλιστα

* οποιοδηποτε ελαχιστοτικο συνολο γεννητορων του I και να επιλεξουμε ο αριθμος των γεννητορων θα ειναι το $v(I)$ *

Αν $R\langle b_1, \dots, b_n \rangle = I$

τοτε

$\langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \rangle$ παραγ. I/pI

<u>Σημειωση</u>

P ειναι P-πρωταρχικο ιδεωδες.

<u>Αρα</u>

$\dim(R) \leq v(P)$.

(R, P) τοπικος δ. Noether

τοτε $\dim R_P < \infty$

$$\dim R_P = ht(P)$$

<u>Απαντηση</u> θετικη

* Υπαρχει πεπερασμενος αριθμος πρωτων ιδεωδων που περιεχουν το I <u>ελαχιστοτικα</u>.

και θα ανηκουν στο συνολο $Ass(R/I)$

③.

R δ. N.

(R, P) τοπικος δακτυλιος.

$\frac{P^n}{P^{n+1}} = \frac{P^n}{P \cdot P^n}$ ειναι R/P δ.χ.

P^{n+1}.

P^n ειναι π.π. R-module.

Αρα $\frac{P^n}{P^{n+1}}$ ειναι R/P-δ.χ. πεπερασμενης διαστασης

$H: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$

$H(n) = \dim_{R/P} P^n / P^{n+1}$

$n \longmapsto \dim_{R/P} P^n / P^{n+1}$

Συναρτηση του Hilbert.

<u>Θεωρημα</u> $\exists\ p(x) \in \mathbb{Q}[x]$

τ.ω. $H(n) = p(n)$ για $\forall n \gg 0$

και μαλιστα

$\dim R = 1 + \deg p(x)$

<u>Βασικο</u>

Να μελετησει δακτυλιους της Noether με διασταση 0.

<u>Ακριβως</u> οι δακτυλιοι του Artin

Λημμα
Εστω R α.π., δ.ακ. Noether
$0 \neq x \notin U(R)$ ⟨x⟩ γνησιο ιδεωδες

$P \in Spec(R)$ με
$P \subsetneq \langle x \rangle$.

Τοτε παρατηρουμε οτι
$P = (0)$.

Απ
P π.π.
$r \in P \Rightarrow r \in \langle x \rangle$
$\Rightarrow r = x \cdot s$
Αφου $x \notin P$ $(P \neq \langle x \rangle)$

και $P \in Spec(R)$ ④
$\Rightarrow s \in P. \Rightarrow r \in P\langle x \rangle$.

$\Rightarrow P \subset P\langle x \rangle \subset P$

$\Rightarrow P = P\langle x \rangle$

Λ.NAK
$\Rightarrow \exists\, b \in \langle x \rangle$ τ.ω.
$(1-b)P = 0$ Αφου
$1-b \neq 0 \Rightarrow P = (0)$ ■

Προταση
Εστω R δ.N. και εστω οτι
$P \subsetneq \langle x \rangle$. Τοτε
οπου $x \notin U(R)$ $ht(P) = 0$

δηλ το P περιεχει ελαχιστοτικα
το μηδενικο ιδεωδες

Πραγματι

Εστω $Q \in Spec(R)$

κ' $Q \subset P$

Πρεπει να αποδειξουμε

$Q = P$

Ας περασουμε στον

R/Q το $P/Q \in Spec(R/Q)$

και R/Q ειναι α.π.δ.

Επιπλεον

$$P/Q \subsetneq (x)/Q$$

Απο τα προηγουμενα ⑤

$$\Rightarrow P/Q = 0 \Rightarrow$$

$$P = Q$$

Αρα $ht(P) = 0$ ∎

Scanned with CamScanner

Διάσταση τοπολ. χώρου: $X \neq \emptyset$ τοπ. χώρος. Ορίζουμε $\dim X \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

ως το supremum των μηκών n αλυσίδων της μορφής

$$\emptyset \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n \subseteq X \qquad (*)$$

με Y_i ανάγωγα, κλειστά του X.

$\rightsquigarrow$ Θα τον εφαρμόσουμε σε $X \subseteq k^n$ αλγ. σύνολο με τοπολογία Zariski, (k = αλγ. κλειστό)

Πρόταση: $\dim X = \dim \underbrace{k[X]}_{\text{δ. σωτ.}}$ $\left(k[X] = k[x_1, \dots, x_n] / \mathbb{I}(X) \right)$.

Απόδ. $\exists$ 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε αλυσίδες $(*)$ και αντίστοιχες αλυσίδες πρώτων ιδεωδών του $k[X]$!

Αν έχω την $(*)$ $\underset{\text{επάγει}}{\rightsquigarrow}$ $\mathbb{I}(X) \subseteq \mathbb{I}(Y_n) \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{I}(Y_1) \subsetneq \mathbb{I}(Y_0)$

$\to$ $\mathbb{I}(Y_i)$ πρώτα ιδεώδη, εγκλεισμοί γνήσιοι διότι Y_i αλγεβρικά.

Αντίστροφα: αν $p_0 \subsetneq p_1 \cdots \subsetneq p_n$ αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του $k[X]$

έπεται $V(p_n) \subsetneq V(p_{n-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq V(p_0)$ $(\subseteq X)$

$V(p_i)$ ανάγωγο διότι $I(V(p_i)) = p_i$ πρώτο (NSS)

Γνήσιο εγκλεισμό, από NSS.

π.χ. $\dim \mathbb{C}^n = n$ διότι ο δακτύλιος συντεταγμένων του $\mathbb{C}^n$ είναι ο $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ με διάσταση n.

κλειστό υποσύνολο

Λήμμα: X = τοπ. χώρος και $X' \subseteq X$ τότε $\dim X' \leq \dim X$.

Διότι αν $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq X'$ αλυσίδα κλειστών αναγώγων του X'

έπεται —— 〃 —— $\subseteq X$ —— 〃 —— X.

Πόρισμα: Αν $X \subseteq K^n$ αλγεβρικό τότε $\dim X \leq n$. (παρατήρηση)

~~> Έχουμε ορίσει Noetherian δακτυλίους

Γενίκευση: Έστω M ένα R-module. Το M λέγεται Νόθεριαν αν μία εκ των 3 ισοδύναμων συνθηκών:

- κάθε αύξουσα ακολουθία $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ από R-submodules γίνεται στατική.
- κάθε οικογένεια $\neq \emptyset$ από R-submodules έχει μεγιστικό στοιχείο.
- κάθε R-submodule είναι π.π. R-module.

π.χ. $M = K[x]$: ως $K[x]$-module είναι Νόθεριαν (δηλ. ο δακτύλιος $K[x]$ είναι Noetherian)

: ως K-module $K\langle x\rangle \subsetneq K\langle x, x^2\rangle \subsetneq \ldots$ άπειρη

όχι Νόθεριαν module.

Artinian modules: Ένα R-module M λέγεται Artinian αν ικανοποιεί μία εκ των δύο ισοδύναμων συνθηκών:

- Κάθε φθίνουσα ακολουθία $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ από R-modules γίνεται στατική.
- Κάθε μη κενή οικογένεια S από R-submodules έχει ελαχιστοτικά στοιχεία.

Ορολογία Ένας δακτύλιος R λέγεται δακτύλιος του Artin αν είναι Artinian ως R-modules.

π.χ. $R = K[x]$ ως R-module. Είναι δακτύλιος του Artin?

$$\langle x \rangle \supsetneq \langle x^2 \rangle \supsetneq \langle x^3 \rangle \supsetneq \dots$$ απειρη.

όχι.

π.χ. V ένας k-δ.χ. με $\dim_k V = n < \infty$ (k-module).

k-submodules = οι υπόχωροι του.

Κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία υποχώρων γίνεται στατική, δηλ. V = Nöther + Artin k-module.

⇝ Για δακτυλίους: ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο R είναι δακτύλιος του Artin ⟺ είναι δακτύλιος του Nöther και κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο.

Λήμμα: Έστω M ένα R-module και N ένα submodule του M. Τότε M είναι Noetherian (αντ. Artinian) ⟺ N και το M/N είναι Noetherian (αντ. Artinian).

Απόδ. Το κάνουμε για Nötherian (αναστρέφοντας εγκλεισμούς ⇝ Artinian)

$\Rightarrow$ Εστω M Nötherian. Τοτε

- N ειναι Nötherian, διοτι τα submodules του N ειναι και submodules του M.

- M/N : (οπως δειχνουμε R Noetherian $\Rightarrow$ R/I Noetherian)

$\Leftarrow$ Εστω N, M/N Nötherian. Παιρ.

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$ R-submodules του M.

- Παιρ. $N_k = M_k \cap N$, $P_k = M_k + N/N$.

Τα N_k, P_k αυξουσες ακολουθιες απο submodules του N και M/N $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$P_k = M_k + N / N \cong M_k / M_k \cap N = N_k$$

Δηλ. ο ομομορφισμός ! $\varphi_k : M_k \xrightarrow{\text{επί}} P_k$ έχει $\ker \varphi = N_k$

$m \longrightarrow \overline{m + 0}$

Από υπόθεση $\exists\, n \in \mathbb{N}$ με $N_k = N_n$, $P_k = P_n$, $\forall\, k \geq n$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $M_k = M_n$, $k \geq n$: "$\supseteq$" ✓

"$\subseteq$" Έστω $a_k \in M_k$ τότε $\varphi_k(a_k) = \varphi_n(a_n)$

$\Rightarrow$ $a_k - a_n \in N_k = N_n$ δηλ. $\exists\, b \in N_n$ με

$a_k = a_n + b \in M_n$..