Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Κύρια Σημεία για την Επανάληψη

Να είστε σε θέση να δώσετε παραδείγματα για όλους τους ορισμούς.

(α') Αν I ιδεώδες δακτυλίου R, ποια είναι η σχέση (πρώτων, μέγιστων) ιδωδών τού R και τού R/I (με αποδείξεις);

(β') Διατύπωση τού Λήμματος τού Zorn. Πού το έχουμε χρησιμοποιήσει;

(γ') Να δείξετε ότι $\mathrm{Rad}(I)$ είναι η τομή των πρώτων ιδεωδών που περιέχουν το I.

(δ') Ορισμός συστολής και επέκτασης ιδεωδών ως προς εναν ομομορφισμό δακτυλίων. Ποια είναι η σχέση των I^{ec} και J^{ce} με τα I και J αντίστοιχα;

(ε') Ορισμός τοπικοποίησης δακτυλίου $S^{-1}R$. Διατύπωση της καθολικής ιδιότητα της τοπικοποίησης. Ποια η αντιστοιχία ιδεωδών τού $S^{-1}R$ και R; Να γνωρίζετε ότι αν $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες τότε ο δακτύλιος $R_{\mathfrak{p}}$ είναι τοπικός δακτύλιος. Αν I είναι ιδεώδες του R να περιγράψετε το $IS^{-1}R \cap R$.

(ϛ') Ορισμός αναγώγου ιδεώδους. Απόδειξη ότι τα πρώτα ιδεώδη είναι ανάγωγα.

(ζ') Διατύπωση και απόδειξη των τριών ισοδύναμων ορισμών του δακτυλίου της Noether.

(η') Απόδειξη του ότι σε δακτύλιο της Noether κάθε γνήσιο ιδεώδες γράφεται ως πεπερασμένη τομή αναγώγων.

(θ') Διατύπωση του Θεωρήματος Βάσης του Hilbert.

(ι') Ορισμός πρωταρχικού ιδεώδους. Να γνωρίζετε ότι:

1. σε δακτύλιο της Noether τα ανάγωγα ιδεώδη είναι πρωταρχικά
2. I πρωταρχικό ιδεώδες τότε το $\mathrm{Rad}(I)$ είναι πρώτο.
3. η τομή δύο πρωταρχικών με το ίδιο ριζικό είναι πρωταρχικό ιδεώδες.
4. τι σημαίνει ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση ενός ιδεώδους.
5. σε έναν δακτύλιο τής Noether κάθε ιδεώδες έχει ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση.

(ια') Αν I ιδεώδες τού R και $a \in R$, τί είναι το ιδεώδες $(I : a)$; Αν $\mathfrak{q}$ είναι $\mathfrak{p}$-πρωταρχικό και $a \notin \mathfrak{q}$, τότε το $(\mathfrak{q} : a)$ είναι $\mathfrak{p}$-πρωταρχικό (με απόδειξη).

(ιβ') Τι είναι το σύνολο $\mathrm{Ass}(R/I)$ και ποια η σχέση του με μια ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση του I; Τί καθορίζεται μοναδικά σε μια μια ελάχιστη, απέριττη πρωταρχική ανάλυση τού I; αν $I \subset P$ ελαχιστοτικά, ποια είναι η ιδιότητα του $IR_P \cap R$;

(ιγ') Αν $Z(R)$ οι διαιρέτες τού μηδενός τού R μαζί με το 0, τότε $Z(R) = \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{AssR}}\mathfrak{p}$ (με απόδειξη).

(ιδ') Αν $\mathrm{Rad}I = \mathfrak{m}$ μέγιστο ιδεώδες τότε το I είναι πρωταρχικό (με απόδειξη) και ὰρα τα $\mathfrak{m}^n$ είναι πρωταρχικά ιδεώδη, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ιε') Αν R δακτύλιος τής Noether και I ιδεώδες, τότε τα ελαχιστοτικά στοιχεία τού $\mathrm{Ass}(R/I)$ είναι ακριβώς τα ελαχιστοτικά πρώτα ιδεώδη τού R που περιέχουν το I (με απόδειξη).

(ιϛ') Ορισμός τού R-module και του π.π. R-module.

(ιζ') Διατύπωση τού Λήμματος NAK και του γενικευμένου Θεωρήματος Cayley - Hamilton. Αποδείξεις για τα επόμενα:

1. αν $M = IM$, όπου $I \subset J(R)$, τότε $M = 0$.
2. αν $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος και $M = N + \mathfrak{m}M$, τότε $M = N$.
3. αν $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος και $M/\mathfrak{m}M = R/\mathfrak{m}\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$, τότε $M = R\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

(ιη΄) Ορισμός ακέραιου στοιχείου επέκτασης δακτυλίων και πότε η επέκταση λέγεται ακέραια. Αποδείξεις για τα επόμενα:

1. αν $R \subset R'$ επέκταση δακτυλίων με το R' να είναι ένα π.π. R-module τότε η επέκταση είναι ακέραια.
2. αν $R \subset R'$ επέκταση δακτυλίων με το R' να είναι μια π.π. R-άλγεβρα τότε η επέκταση είναι ακέραια αν και μονον αν ο R' είναι ένα π.π. R-module.

(ιθ΄) Διατύπωση των Θεωρήματων ανάβασης, επικάθισης, μή συγκρισιμότητας κλπ για ακέραιες επεκτάσεις. Απόδειξη του ότι αν $R \subset R'$ ακέραια επέκταση με R, R' ακέραιες περιοχές, τότε R σώμα αν και μόνον R' είναι σώμα.

(κ΄) Απόδειξη τού ότι τομές και πεπερασμένες ενώσεις αλγεβρικών συνόλων είναι αλγεβρικά. Ποιά είναι τα αλγεβρικά υποσύνολα του k (με απόδειξη).

(κα΄) Διατύπωση τού NSS. Απόδειξη των:

1. $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathbb{IV}(I)$.
2. Αν $V_1 \subsetneq V_2$ αλγεβρικά τότε $\mathbb{I}(V_2) \subsetneq \mathbb{I}(V_2)$.
3. Αν k αλγεβρικά κλειστό τότε $I_1 \subsetneq I_2$ συνεπάγεται $\mathbb{V}(I_2) \subsetneq \mathbb{V}(I_1)$.
4. Αντιπαράδειγμα: Αν k όχι αλγεβρικά κλειστό το τελευταίο, εν γένει, δεν ισχύει.

(κβ΄) Η τοπολογία Zariski τού k^n και τού $\mathrm{Spec}R$ - ποιά είναι τα κλειστά υποσύνολα. Ποιά είναι η αλγεβρική θήκη ενός υποσυνόλου τού k^n ή τού $\mathrm{Spec}R$.

(κγ΄) Τί είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο; Απόδειξη τού ότι ένα αλγεβρικό σύνολο V είναι ανάγωγο αν και μόνον αν το $\mathbb{I}(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες. Αν k αλγεβρικά κλειστό, ποιά είναι η αντιστοιχία μεταξύ αλγεβρικών συνόλων (ανάγωγων, σημείων τού k^n) και ιδεωδών τού $k[x_1, \ldots, x_n]$;

(κδ΄) Απόδειξη τού ότι κάθε κλειστό υποσύνολο τού k^n ή τού $\mathrm{Spec}(R)$, όπου R δακτύλιος της Noether, διασπάται σε άθροισμα αναγώγων συνιστωσών. Πώς αυτό συνεπάγεται ότι κάθε ιδεώδες I τού R περιέχεται σε πεπερασμένων πλήθος ελαχιστοτικών πρώτων ιδεωδών; Ποια είναι η σχέση τών ελαχιστοτικών στοιχείων τού $\mathrm{Ass}(R/I)$ με τη διάσπαση τού $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec}(R)}(I)$ σε ανάγωγες συνιστώσες;

(κε΄) Πώς ορίζεται ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[V]$ ενός αλγεβρικού συνόλου V. Τί είναι μορφισμός $\phi : V \to W$ μεταξύ αλγεβρικών συνόλων. Ποιός είναι ο επαγώμενος ομομορφισμός k-αλγεβρών $\tilde{\phi} : k[W] \to k[V]$ (με απόδειξη ότι είναι ομομορφισμός); Αντίστροφα, δοσμένου μορφισμός k-αλγεβρών $\tilde{\phi} : k[W] \to k[V]$ πώς αυτός επάγει μορφισμό $\phi : V \to W$ μεταξύ των αλγεβρικών συνόλων V και W; Πότε δύο αλγεβρικά σύνολα λέγονται ισόμορφα;