$$f = \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} = \sum_{m=0}^{d} \underbrace{\sum_{k_1+\dots+k_n=m} c_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}}_{f_m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{d} f_m \quad \text{(άθροισμα ομογενών)}$$

f_m: ομογενές βαθμού m, d = ο βαθμός του f.

<u>Λήμμα</u> $f_d \in K[x_1,\dots,x_n]$ <u>ομογενές</u> βαθμού $d \in \mathbb{N}$. Τότε

$\exists\ a_1,\dots,a_{n-1} \in K$ με $f_d(a_1,\dots,a_{n-1},1) \neq 0$.

<u>Απόδ.</u> Επαγωγή στο n: $n=1$ $\quad f_d(x_1) = \overset{\neq 0}{c}\, x_1^d$, $\quad f(1) = c \neq 0$.

Έστω ότι ισχύει για $\leq n-1$.

$$f_d = \sum_{i=0}^{d} \underbrace{f_{d-i}(x_2,\dots,x_n)}_{\text{ομογενές βαθμού } d-i} x_1^{i}$$

Επειδή $f_d \neq 0$, $\exists\ i = i_0$ τ.ω. $f_{d-i_0}(x_2,\dots,x_n) \neq 0$

άπο επαγ. υπόθεση $\exists\ a_2, \dots, a_{n-1} \in k$ με $f_{d-L_0}(a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$

Εστω $g(x_1) = f_d(x_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$ διότι $\uparrow \neq 0$

(L_0 : συντελεστής του)

άρα $\exists\ a_1 \in k$ με $\underset{\neq 0}{g(a_1)} = f_d(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1)$

<u>Πρόταση</u> $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} c_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$. Τότε

$\exists\ \lambda \in k,\ a_1, \dots, a_{n-1} \in k$ τ.ω. $\lambda f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$

μονικό ως προς y_n.

<u>Αποδ.</u> $f = \sum_{m=0}^{d} f_m$, ομογενή. Το $f_d = \sum_{k_1 + \dots + k_n = d} c_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

Πάρε από το λήμμα, $a_1, \dots, a_{n-1} \in k$ τ.ω. $f_d(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$

Τότε $f(y_1+a_1y_n, \dots, y_{n-1}+a_{n-1}y_n, y_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n} c_{k_1\dots k_n} (y_1+a_1y_n)^{k_1} \cdots (y_{n-1}+a_{n-1}y_n)^{k_{n-1}} \cdot y_n^{k_n}$

Ως πολυώνυμο των y_n, έχει μεγιστοβάθμιο όρο τον

$$\Big(\sum_{k_1+\dots+k_n=d} c_{k_1\dots k_n} a_1^{k_1} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\Big) y^d .$$

Πάρε $\lambda := f_d(a_1,\dots,a_{n-1},1)^{-1}$.

$f_d(a_1,\dots,a_{n-1},1) \neq 0$.

$\uparrow$ K

Θ. κανονικοποίησης Nöther: T = π.π. k-άλγεβρα, τότε $\exists$ $z_1,\dots,z_N \in T$ τ.ω. ο $R = k[z_1,\dots,z_N] \subseteq T$ με τον T = π.π. R-module

πολυωνυμικός δακτύλιος

$$R = k[z_1,\dots,z_N] \subseteq T = R\langle c_1=1, c_2,\dots,c_r\rangle, \; c_i \in T.$$

Αποδ: $T = k[b_1,\dots,b_n]$, επαγωγή ως προς n.

$n=0$: $T = k$ ισχύει $N=0$, $r=1$. ✓

Έστω ότι ισχύει για $\leq n-1$. Θα το δείξουμε για n!

Παίρνε
$$\varphi : k[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\text{επί}} T$$
$$x_i \longmapsto b_i$$

- $\ker\varphi = 0$: $T \cong k[x_1,\dots,x_n]$ ✓ $(N=n,\ r=1)$.
- $\ker\varphi \neq 0$, $\exists\, f \neq 0 \in k[x_1,\dots,x_n]$ με $f(b_1,\dots,b_n) = 0$.

Από την Πρόταση, $\exists\, a_1,\dots,a_{n-1} \in k$, $\lambda \in k$ τ.ω.

$g(y_1,\dots,y_n) = \lambda f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$ μονικό ως προς y_n

$f(b_1,\dots,b_n)=0 \rightsquigarrow g(b_1-a_1 b_n,\dots,b_{n-1}-a_{n-1} b_n, b_n)=0.$

μονικό ως προς z.

Συνεπώς το b_n είναι ρίζα του $h(z) = g(\underbrace{b_1-a_1 b_n}_{b_1'},\dots,\underbrace{b_{n-1}-a_{n-1} b_n}_{b_{n-1}'}, z)$

$h(z) \in k[b_1',\dots,b_{n-1}'][z] = R'[z]$

$T = k[b_1,\dots,b_n] = k[b_1',\dots,b_{n-1}',b_n] = \underbrace{k[b_1',\dots,b_{n-1}']}_{R'}[b_n]$

$k[z_1,\dots,z_N] \subseteq R' \subseteq R'[b_n] = T \Rightarrow k[z_1,\dots,z_N] \subseteq T$

π.π. $k[z_1,\dots,z_N]$-module (από επαγωγική υπόθεση)

π.π. ως R'-module.

π.π. $k[z_1,\dots,z_N]$-module.

π.χ.

$V = V(x_1x_2 - 1)$

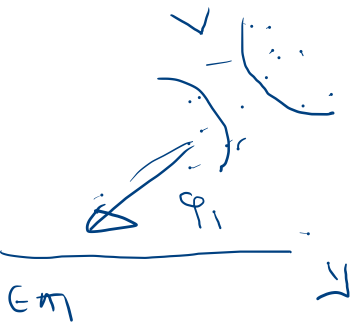
$$\begin{array}{c}(x_1, x_2)\\ \downarrow \varphi \\ x_1\end{array}$$

$$\tilde{\varphi} : k[x_1] \xhookrightarrow{\text{όχι ακέραια}} k[x_1, x_2]/\langle x_1x_2 - 1\rangle = k[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$$

$$x_1 \longmapsto \bar{x}_1$$

$\rightsquigarrow y = x_1 - x_2 : x_1 = y + x_2$ άρα

$$x_1x_2 - 1 \rightsquigarrow (y + x_2)x_2 - 1 = x_2^2 + yx_2 - 1.$$



$$\begin{array}{c}(x_1, x_2)\\ \downarrow \varphi_1 \\ x_1 - x_2 = y\end{array}$$

$$\tilde{\varphi}_1 : k[y] \hookrightarrow k[y, x_2]/\langle x_2^2 + yx_2 - 1\rangle = k[\bar{y}, \bar{x}_2]$$

ακέραια (επέκταση)

π.χ. $\mathbb{R}^3 \supseteq V = V(xy+yz+zx)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & & (x,y,z) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & & (x,y). \end{array}$$

$\tilde{\varphi} : k[x,y] \hookrightarrow k[x,y,z] / \langle xy+yz+zx \rangle = k[\bar{x},\bar{y},\bar{z}]$. όχι ακέραια.

$\varphi^{-1}(0,0) = \{(0,0,z)\}$ άπειρο σύνολο.

$\rightsquigarrow x' = x-z,\ y' = y-z$. : $xy+yz+zx \rightsquigarrow (x'+z)(y'+z) + (y'+z)z + (x'+z)\cdot z$

ως προς z μεγιστοβάθμιος $3z^2$ αντιστρ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \supseteq & V \\ \downarrow & \swarrow_{\varphi_1} & \\ \mathbb{R}^2 & \sim & (x',y') \end{array}$$

πλήρως προβολή

Έτσι, παίρνουμε. $(\tilde{\varphi}_1 : k[x',y'] \hookrightarrow k[x',y',z] / \langle\ \rangle)$ ακέραια

$R \xrightarrow{\text{ακέραια}} R'$ Αποδείξαμε

- Αν $P \in \operatorname{Spec}(R)$, τότε $\exists$ $Q \in \operatorname{Spec}(R')$ τ.ω. $Q^c = P$ (Ιδιότητα επικάλυψης)

- Μη συγκρισιμότητα

δηλ. αν $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Spec}(R')$ και $Q_1^c = Q_2^c$ τότε $Q_1 \not\subseteq Q_2$ και $Q_2 \not\subseteq Q_1$.

Going Up

Πρόταση

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\text{ακ.}"] & R' \\ P_2 \arrow[d, no head] \arrow[r, squiggly, no head] & Q_2 \arrow[d, dashed, no head, "\exists"] \\ P_1 \arrow[r, no head] & Q_1 \end{tikzcd}$$

$P_1, P_2 \in \operatorname{Spec}(R)$

$P_1 \subsetneq P_2$

Έστω $Q_1 \in \operatorname{Spec}(R')$ τ.ω. $Q_1^c = P_1$. Τότε $\exists$ $Q_2 \supsetneq Q_1$ τ.ω. $Q_2 \in \operatorname{Spec}(R')$ και $Q_2^c = P_2$

Απ.

Αφού $Q_1^c = P_1$ έχουμε

$$R/\underset{P_1}{Q_1^c} \xrightarrow{\text{ακέραια}} R'/Q_1$$

$P_2/P_1 \in \operatorname{Spec}(R/P_1)$.

άρα $\exists$ πρώτο ιδεώδες στον R'/Q_1 που συστέλλεται στο P_2/P_1, έστω Q_2/Q_1 όπου $Q_2 \in \operatorname{Spec}(R')$ (και $Q_1 \subseteq Q_2$)

Δηλ. $(Q_2/Q_1)^c = P_2/P_1$

Άρα $Q_2^c = P_2$

(αλγ. αποδειξη). R' π.π. R-αλγεβρα

Προταση Εστω $R \xhookrightarrow{ακ.} R'$.

Εστω $P \in Spec(R)$. Τοτε

$T = \{Q \in Spec(R') : Q^c = P\}$

ειναι πεπερασμενο.

Απ

$P \in Spec(R) \Rightarrow S = R \setminus P$

ειναι π.κ. στον R κ' στον R'.

Αρα

$R_P \xhookrightarrow{ακεραια} S^{-1}R'$ ... *

προσοχη: τα πρωτα ιδεωδη Q του R' που "συστελλονται" στο P ειναι **ακριβως** τα μεγιστα ιδεωδη $QS^{-1}R'$ του $S^{-1}R'$ που περιεχουν το $PS^{-1}R'$.

(αποδειξη κριτηριου συστολης).

Θελουμε λοιπον να αποδειξουμε οτι ο # των μεγιστων ιδεωδων του $S^{-1}R'$ που περιεχουν το $PS^{-1}R'$ ειναι πεπερασμενος.

---

* $R_P / PR_P \xhookrightarrow{ακεραια} S^{-1}R' / PS^{-1}R'$

(χρησιμοποιησαμε ακ. λημμα $R \xhookrightarrow{ακ.} R'$

τοτε $I \trianglelefteq R'$

$R/I^c \xhookrightarrow{ακ.} R/I$)

Ομως PR_P ειναι (το μοναδικο) μεγιστο ιδεωδες του R_P

Αρα R_P/PR_P ειναι σωμα

κ

$K \xrightarrow{\text{ακεραια}} A$
σωμα

οπου $A = S^{-1}R' / pS^{-1}R'$

Ποσα μεγιστα ιδεωδη εχει ο A ?

Απο τη μη συγκρισιμοτητα εχουμε οτι

$Spec(A) = maxSpec(A)$

(αφου ολα τα πρωτα ιδεωδη του A συστελλονται στο $\langle 0 \rangle$).

Το A ειναι π.π. K-αλγεβρα

Και το A ειναι ακεραια επεκταση του K

αρα το A ειναι π.π. K-module

Αφου K ειναι σωμα $\Rightarrow$ A ειναι π.π. K-δ.χ.

επομενως εχει πεπερασμ. διασταση.

Και αρα καθε αυξουσα αλλα και καθε φθινουσα ακολουθια υποχωρων του A σταματα.

Οποτε A ειναι δακτ. της Noether και αρα καθε μη κενο συνολο S υποχωρων του A εχει μεγιστικο στοιχειο. Αντιστοιχα S' εχει ελαχιστικο στοιχειο ως προς σχεση εγκλεισμου.

③

Εστω S συνολο των ιδεωδων που γραφονται ως πεπερασμενες τομες πρωτων ιδεωδων.

$S \neq \phi$ αφου καθε πρωτο ιδεωδες του A ανηκει στο S

Εστω I το ελαχιστο στοιχειο του S

$I = P_1 \cap \cdots \cap P_n$

οπου $P_i \in \text{maxSpec}(A)$

Εστω P καποιο πρωτο ιδεωδες του A

$$I \overset{\text{ελαχιστ.}}{=} P \cap I = P \cap P_1 \cap \cdots \cap P_n$$ (4)

δηλ

$$(P_1 \cap \cdots \cap P_n) = P \cap (P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

$\Longrightarrow P_1 \cap \cdots \cap P_n \subset P$

$\xRightarrow{P \text{ πρωτο ιδεωδες}} P_i \subset P$

$\xRightarrow{P_i \text{ μεγιστο}} P_i = P$

$\Longrightarrow$ $\text{maxSpec}(A)$ ειναι πεπερασμ. συνολο