$I = \langle x^2 - y^2 \rangle$

$\underbrace{K[x]}_{R} \hookrightarrow K[x,y]/I$

$\qquad = K[\bar{x}, \bar{y}] = \underbrace{K[\overset{R}{\bar{x}}]}[y]$ A

όπου $\bar{x} = x + I$

$\bar{y} = y + I$

$c \longmapsto c + I \quad (c \in \mathbb{K})$

$x \longmapsto x + I$

$f(x) \longmapsto f(\bar{x})$

$R = K[x] \cong K[\bar{x}]$.

$R \xhookrightarrow[\text{ακεφ}]{} A$

$P = \langle x \rangle = \{ f(x) \cdot x : f(x) \in K[x] \} = R \cdot x$

P "ταυτίζεται" υποσύνολο του A, όμως

$P \not\trianglelefteq A$

$R \xhookrightarrow{\text{ακ}} A$

$P \rightsquigarrow P^e = A \cdot \bar{x} = A(x + I)$

$= \{ f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{x} + g(x,y) \cdot (x^2 - y^2) + I \}$

$= \langle x, \cancel{x^2 - y^2} \rangle / I$

$= \langle x, y^2 \rangle / I$

$P^e \trianglelefteq A$, $P^e \notin \mathrm{Spec}(A)$.

P^e περιεχ. ελαχιστ. $\langle x, y \rangle / I \in \mathrm{maxSpec}(A)$.

και

$P = P^e \cap R$.

$P = \langle x-1 \rangle = \{ f(x)\cdot(x-1) : f(x) \in K[x] \}$

$\in \text{maxSpec}\, R$

$P^e = (\bar{x}-1)\cdot A = \langle x-1, x^2-y^2 \rangle / I$

$= \langle x-1, (x-y)(x+y) \rangle / I$

$= \langle x-1, x-y \rangle / I \cap \langle x-1, x+y \rangle / I$

$\text{maxSpec}(A) \ni \begin{cases} Q_1 = \langle x-1, x-y \rangle / I \\ Q_2 = \langle x-1, x+y \rangle / I \end{cases}$

$R \neq Q_1^c = Q_2^c \supseteq P$ μέγιστο

$\Rightarrow P = Q_1^c \cancel{\neq} Q_2^c$

<u>Επικάθηση</u> (Πόρισμα πρότασης)

$R \xhookrightarrow[\text{ακέραιο}]{} A$

Αν $P \in \text{Spec}(R)$

$\Rightarrow$

$\exists\, Q \in \text{Spec}(A)$

τ.ω.

$(Q \cap R =)\ Q^c = P$

~~Γενικά~~

Αν $Q^c = P$ <u>τότε</u>

$P^e = Q^{ce} \subset Q$.

<u>Πρόταση</u> (επανάληψη)

$R \hookrightarrow R'$, έστω $P \in \text{Spec}(R)$

$\exists\, Q \in \text{Spec}\, R'$ τ.ω.

$Q^c = P \Longleftrightarrow P^{ec}$

Πορισμα ΙΙ

Αν (R, P) και $R \hookrightarrow R'$
τοπικος

και εστω $P^e \neq R'$

Τοτε $\exists\ Q \in \operatorname{Spec} R'$

τ.ω. $Q^c = P$

Απ

Αφου $P^e \neq R' \Longrightarrow$

$P^{ec} \neq R$

Ομως $P \subset P^{ec}$

P μεγιστο $\Rightarrow P^{ec} = P$

Απο προταση, $\exists$ ζητουμενο Q.

Λημμα 1

$R \xhookrightarrow[\text{ακ.}]{} R'$, $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R'$

Τοτε $R/I^c \xhookrightarrow[\text{ακερ.}]{} R'/I$

$(r+I^c \longrightarrow r+I)$

Απ

Εστω $\overline{a} = a+I \in R'/I$

$\exists\ n$ τ.ω.

$$a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

οπου $c_i \in R$ $\Rightarrow$

$$\overline{a}^n + \overline{c_1}\,\overline{a^{n-1}} + \dots + \overline{c_0} = 0$$

και ταυτιζουμε

$\overline{c_i}$ με το $c_i + I^c$

$\overline{c_i} = c_i + I$

Λημμα 2 Εστω S πολ. κλειστο υποσυνολο του R.
$R \xhookrightarrow[\text{αυ.}]{} R'$

Τοτε $S^{-1}R \xhookrightarrow[\text{ακ.}]{} S^{-1}R'$

Απ

- εμφυτευση $\hookrightarrow$ ... ✓

- Εστω $\frac{a}{s} \in S^{-1}R'$

a ακερ πανω απο R.
$\exists\ n$ τ.ω

$$a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_{n-1}a + c_0 = 0$$

$c_i \in R$,

~~[illegible]~~

$$\Rightarrow \frac{a^n + \dots + c_0}{s^n} = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{s}\right)^n + \frac{c_1}{s}\left(\frac{a}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{c_{n-1}}{s^{n-1}}\left(\frac{a}{s}\right) + \frac{c_0}{s^n} = 0$$

$*\ \frac{c_i}{s^i} \in S^{-1}R$

$\Rightarrow \frac{a}{s}$ ακεραιο

$\boxed{\text{Στη συνεχεια: σελ. 5, + σελ. 6}}$ $\boxed{\text{μετα επιστροφη για πορισμα!}}$

Πορισμα $R \xhookrightarrow{\text{ακ}} R'$
R, R' ακ. περιοχες
~~Τοτε~~
R σωμα $\iff$ R' σωμα

Απ

"$\Longrightarrow$" R σωμα. Εστω $P' \in \text{maxSpec}(R')$

Τοτε $P'^c \underset{\substack{\text{αφου} \\ R\ \text{σωμα}}}{=} \langle 0 \rangle$

Ομως $R' \langle 0 \rangle$ εχει την ιδια ιδιοτητα.

Προταση $\dfrac{\text{Μη συγκρισιμοτητα}}{R \overset{\alpha\kappa.}{\hookrightarrow} R'}$

$P \in \mathrm{Spec}(R)$ και

εστω Q_1 και $Q_2 \in \mathrm{Spec}(R')$ συστελλονται στο P.

(δηλ $Q_1^c = P = Q_2^c$).

Τοτε. $Q_1 \not\subset Q_2$ και $Q_2 \not\subset Q_1$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R' & Q_1 \arrow[dr, dash, dashed] & & Q_2 \arrow[dl, dash, dashed] \\
R & & P &
\end{tikzcd}$$

Ισοδυναμα

Αν $Q_1 \subsetneqq Q_2$ τοτε $Q_1^c \subsetneqq Q_2^c$

Απ $Q_1^c = Q_2^c = P$

Εστω οτι $Q_1 \subset Q_2$

θ.δ.ο. $Q_2 = Q_1$. Εστω οτι $Q_1 \subsetneqq Q_2$, Υπαρχει $a \in Q_2 \setminus Q_1$.

Απο το Λημμα 1

$R/Q_1^c \underset{\alpha\kappa}{\hookrightarrow} R'/Q_1$ δηλ.

$R/P \underset{\alpha\kappa.}{\hookrightarrow} R'/Q_1$ - εστω

$\overset{\in \overline{Q_2}}{\overline{a}^n} + \overline{c_1}\,\overline{a}^{n-1} + \dots + \overline{c_n} = 0$

$\in \overline{Q_2}$ ελαχ. βαθμου n.

$\Rightarrow -(\underbrace{\overline{a}^n + \dots + \overline{c_{n-1}}\,\overline{a}}_{\in \overline{Q}}) = \overline{c_n}$

Άρα $\overline{c_n} \in \overline{a_2} = a_2/a_1$

Όμως $c_n \in R \cap a_2 = P$.

$\overline{c_n} = c_n + P = P \Rightarrow \overline{c_n} = 0_{R'/a_1}$

$\Rightarrow$

$\overline{a}^n + \overline{c_1}\,\overline{a}^{n-1} + \cdots + \overline{c_{n-1}}\,\overline{a} = 0$

$\Rightarrow \overline{a}\,(\overline{a}^{n-1} + \cdots + \overline{c_{n-1}}) = 0$

R'/a_1 α.π.

$\overline{a} \neq 0$

$\Rightarrow \overline{a}^{n-1} + \cdots + \overline{c_{n-1}} = 0$

άτοπο αφού

$n-1 < n$

(Συνέχεια από ④)

Από μη συγκρισιμότητα

$P' = \langle 0 \rangle$

$\Rightarrow R'$ είναι σώμα.

"$\Leftarrow$"

R' σώμα

R όχι σώμα

$\exists$ $P \in \max\mathrm{Spec}(R)$.

$P \neq \langle 0 \rangle$.

Από Θ. Επικάλυψης

$\exists$ $P' \in \mathrm{Spec}(R')$ τ.ω.

$(P')^c = P$. $\longrightarrow$ $\leftarrow$

$k =$ αλγ. κλειστό : $\varphi : \underset{\underset{Y'}{\cup|}}{Y} \xrightarrow{\text{μορφισμός}} \underset{\underset{\varphi(Y')}{\shortparallel}}{X}$, Y, X ανάγωγα αλγ. σύνολα

Επάγει $\tilde{\varphi} : \underset{g}{k[X]} \longrightarrow \underset{g \circ \varphi}{k[Y]}$

$\rightsquigarrow$ $Y' = V(p) \overset{\text{ανάγωγο}}{\subseteq} Y$ ⇝ $\overline{\varphi(Y')} \underset{(*)}{=} V(p^c)$ κ' $p^c \underset{(**)}{=} I(\varphi(Y'))$

$\hookrightarrow$ πρώτο του $k[Y]$

• Πότε $\tilde{\varphi}$ 1-1 : $\langle 0 \rangle^c_{k[Y]} = \langle 0 \rangle_{k[X]}$: $Y = V(\langle 0 \rangle_{k[Y]}) \overset{(*)}{\Rightarrow} \overline{\varphi(Y)} = V(\langle 0 \rangle_{k[X]}) = X$

• Υποθέτω $\tilde{\varphi}$ 1-1 και ότι $k[X] \hookrightarrow k[Y]$ ακέραια

Ισχυρισμός: $\forall\, x \in X \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_s\}$ $(\neq \emptyset)$ (ειδικότητα φ: επί)

• φ συνεχής, άρα $\varphi^{-1}(x)$ αλγεβρικό.

• Οι ανάγωγες συνιστώσες του $\varphi^{-1}(x)$ είναι μονοσύνολα: αν όχι

$\exists\ Y' = V(p) \subseteq \varphi^{-1}(x)$, $y' \in Y'$ με $\{y'\} \subsetneq Y' \Rightarrow I(\{y'\}) = m_{y'} \supsetneq I\,V(p) = p$

$\hookrightarrow$ πρώτο

Έχω $p \subsetneq m_{y'}$. Επίσης $\varphi(Y') = \{x\} = \varphi(y') \overset{(**)}{\Longrightarrow} p^c = \underset{\underset{m_x}{\shortparallel}}{I(\{x\})} = m_{y'}^c$, κ' τότε

· Το $\tilde{\varphi}^{-1}(x)$ διασπάται αναλύεται σε πεπερ. πλήθος αναγώγων συνιστωσών

$\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}^{-1}(x)$ πεπερ. σύνολο, $\neq \emptyset$ (1)

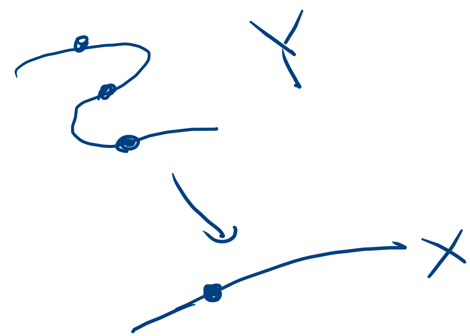
(1) $m_x = p^c$, κάποιο p. άρα $\overline{\varphi(V(p))} = \{x\}$

$Y' = V(p)$

$$\varphi(V(p)) \begin{cases} \{x\}. \\ \emptyset \end{cases}$$

άρα $\exists$ $Y' \subseteq Y$ με $\varphi(Y') = \{x\}$ $(Y' = \{y'\})$.

Αν $Y \xrightarrow{\varphi} X$ έχει $\tilde{\varphi} : k[X] \xrightarrow{\text{ακέραια}} k[Y]$ τότε η φ είναι πεπερ. απεικόνιση:



Θ. Κανονικοποίησης της Nöther Έστω T μια π.π. k-άλγεβρα

Τότε $\exists\, y_1, \dots, y_n \in T$ τ.ω. $k[y_1, \dots, y_n] \subseteq T$ πολυωνυμικός δακτύλιος

(δηλ. ο ομομορφισμός $\underbrace{k[x_1, \dots, x_n]}_{\text{πολυώνυμα}} \longrightarrow k[y_1, \dots, y_n]$ είναι ισομορφισμός)

$$x_i \longrightarrow y_i$$

και το T ναι είναι ένα π.π. $k[y_1, \dots, y_n]$-module.

$$\underbrace{k[y_1, \dots, y_n]}_{R} \subseteq T = R\langle c_1 = 1, c_2, \dots, c_r \rangle.$$