Σύνολο Ασκήσεων 2 (Τετάρτη 24 Νοεμβρίου).

⑧ $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$, $\langle 18\rangle$ α πρωταρχικά.

Nöther? $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-17}] = \mathbb{Z}\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ ...... ???

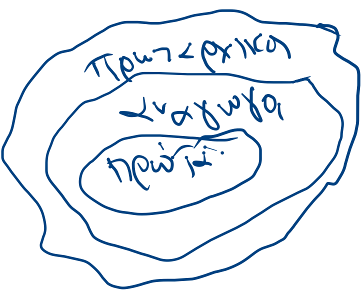
x^2+17.

$\to \varphi: \mathbb{Z}[x] \to R$ επί, $\ker\varphi = \langle x^2+17\rangle$.

$f(x) \to f(i\sqrt{17})$

$$R \cong \mathbb{Z}[x]/\langle x^2+17\rangle$$ } δακτύλιος Nöther

↳ δακτύλιος της Nöther



Αν q πρωταρχικό $\Rightarrow$ $\mathrm{Rad}\, q = p$ πρώτο

Αν $\mathrm{Rad}\, q =$ μέγιστο τότε q πρωταρχικό.

$$18 = 2\cdot 9 = (1+\sqrt{-17})(1-\sqrt{-17}).$$

$18 = \langle 2\rangle \cdot \langle 9\rangle = \langle 2\rangle \cap \langle \underset{3^2}{\underset{\shortparallel}{9}}\rangle$ $\qquad \langle 2\rangle + \langle 9\rangle \overset{?}{=} \langle 1\rangle$

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-17}] = a + b\sqrt{-17}$

$\underset{\mathbb{Z}}{\cup\!\shortmid}$

$1 = 1\cdot 9 + (-4)\cdot 2$

- $\langle 1 \pm \sqrt{-17}\rangle$:

$R \cong \mathbb{Z}[x]/\langle x^2+17\rangle \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]$

$\sqrt{-17} \longleftrightarrow \overline{x}$

$\langle 1 \pm \sqrt{-17}\rangle \hookrightarrow \langle \overline{1 \pm x}\rangle \hookrightarrow \langle 1 \pm x, x^2+17\rangle = ?$

Πρώτα $\mathbb{Z}[x]$: $\langle 0\rangle$ $\qquad \langle f(x)\rangle$ ανάγωγο του $\mathbb{Z}[x]$

Μέγιστα $\mathbb{Z}[x]$: $\langle f(x), p\rangle$, $\overline{f(x)} \in \mathbb{Z}_p[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο

↳ πρώτο $\qquad$ p σώμα

$$18 = 2\cdot 3\cdot 3 = (1+\sqrt{-17})(1+\sqrt{-17}).$$

$$= \langle 2\rangle\cdot\langle 3\rangle^2 = \langle 1+\sqrt{-17}\rangle\langle 1-\sqrt{-17}\rangle$$

$$\langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle = \langle 2, 1-\sqrt{-17}\rangle$$

<u>μέγιστο</u>;

$$\langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle \longleftrightarrow \langle \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{2}, 1+x\rangle \in \mathbb{Z}[x]$$

$\longrightarrow$ μέγιστο.

$$\langle 3, 1+\sqrt{-17}\rangle, \quad \langle 3, 1-\sqrt{-17}\rangle$$

μέγιστα

$$\langle 2\rangle = \langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle^2, \quad \langle 3\rangle = \langle 3, 1+\sqrt{-17}\rangle\langle 3, 1-\sqrt{-17}\rangle.$$

$$\langle 18\rangle = \langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle^2 \underset{\cap}{\cdot} \langle 3, 1+\sqrt{-17}\rangle^2 \underset{\cap}{\cdot} \langle 3, 1-\sqrt{-17}\rangle^2$$

— . . . . συνεχίστε . . . .

9 Nöther

→ p_1, p_2 πρώτα : $p_1 \cap p_2$ είναι ριζικό.

$\langle 2\rangle \cap \langle 3\rangle = \langle 6\rangle$

→ Έστω q πρωταρχικό: $q = q_1 \cap \dots \cap q_s$, ελαχιστική $q_i \not\subseteq q_j$

ανάγωγα, άρα πρωταρχικά

Από το 1ο Θ. Μοναδικότητας πρωταρχικής ανάλυσης: $\mathrm{Rad}\, q_i = \mathrm{Rad}\, q$, $\forall i$

Και αντίστροφα: αν $q_1, \dots, q_s$ ανάγωγα με το ίδιο ριζικό, τότε $q_1 \cap \dots \cap q_s$ πρωταρχικό

Επομένως: Γνωρίζοντας τα ανάγωγα ⇝ γνωρίζεις τα πρωταρχικά

= τομής αναγώγων ίδιου ριζικού.

9 γ) : $\langle m_1, \dots, m_s, x_i^{\alpha} m \rangle = \langle m_1, \dots, m_s, x_i^{\alpha} \rangle \cap \langle m_1, \dots, m_s, m \rangle$

$(x_i, m) = 1$

Υπομνήμα αναγωγή: $T = \langle x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_s}^{\alpha_s} \rangle$, $1 \leq s \leq n$.

Έστω $T = I \cap J$, $T \subsetneq I, J$.

$\exists\, m_1 \in I$, $m_1 \notin T$, $m_2 \in J$, $m_2 \notin T$: $m_1 m_2 \in T$ - . . . -

$\rightsquigarrow$ Επομένως γνωρίζουμε τα ανάγωγα αλλά και τα πρωταρχικά.

$\rightsquigarrow$ Είναι το $\langle xy, z \rangle$ ρίζικο? $\langle xy, z \rangle = \langle x, z \rangle \cap \langle y, z \rangle$

πρωτα πρωτα-

$Z(R/I) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}(R/I)} p$.

$\hookrightarrow$ <u>zero divisors</u>.

(13) $R = \mathbb{C}[[z]] = \{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, a_i \in \mathbb{C} \}, +, \cdot$

α) $U(R) = \{ \sum a_i z^i, \ a_0 \neq 0 \}$:

β) αν ιδεώδη τότε $0 \neq I = \langle z^k \rangle \trianglelefteq R$. άρα όλα π.η. (κύρια)

γ) Μοναδικό μέγιστο $\langle z \rangle$, Nötherian.. $\langle z^{10} \rangle \subsetneq \langle z^{9} \rangle \subsetneq \dots$

δ) :

$$\frac{\sum a_i z^i}{\sum b_i z^i = \underset{\neq 0}{b_m} z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots = z^m \big(\underbrace{b_m + b_{m+1} z^1 + \dots}_{\text{αντιστρέψιμο}} \big)} =$$

$$\frac{\sum a_i' z^i}{z^m} = \frac{a_0'}{z^m} + \frac{a_1'}{z^{m-1}} + \dots$$

② K^n ανάγωγο, $\mathbb{I}(K^n)$ = πρώτο ιδεώδες του $K[x_1,..,x_n]$
κ σώμα. $\qquad \overset{?}{\|}$ $\langle 0 \rangle$.

$\underline{n=1}$ $\quad f(x)\in k[x]$ με $f(x_0)=0, \ \forall x_0 \Rightarrow f=0$.
∞

$n=\deg f(x)$: έχει το πολύ n-ρίζες! $a_1,..,a_m$ ρίζα

$$\underbrace{f(x)}_{n}=(x-a_1)\underbrace{f_1(x)}_{n-1} = \ldots\ldots$$

$f(x)\in \mathbb{R}[x]$, τότε το $f(x)$ έχει το πολύ n ρίζες στο $\mathbb{R}$,
$\deg n \qquad$ κ.α.π.
άρα αν το $f(x)$ έχει άπειρες ρίζες στο $\mathbb{R}$
τότε είναι το μηδενικό.

(ίδια απόδειξη με την περίπτωση του σώματος)

$\underline{n=2}$: $f(x,y) \in k[x,y]$ με $f(x_0, y_0) = 0$, $\forall (x_0, y_0) \in k^2$

$$\Longrightarrow f = 0 \ ?$$

$$f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\,y + \dots + a_n(x)\,y^n \in \underbrace{k[x]}_{R}[y]$$

$$\| \qquad F(y) \in R[y]$$

$F(y_0) = 0$, $\forall y_0 \in \overset{\in R}{K} \Longrightarrow$ $F(y) \equiv 0 \Longrightarrow a_0(x) = \dots = a_n(x) = 0$

άρα $f(x,y) =$ το μηδενικό πολυώνυμο.

κάντε το για n:

(7) $R = \left(\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2, +, \cdot\right)$

α) $1 = (1,1,1,\ldots)$, Διαιρέτες του 0 : $R \setminus \{0,1\}$.

β) Όχι δακτύλιος Nöther : $e_n = (0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1},0,\ldots,0,\ldots)$

$$\underset{\substack{\| \\ \{0,e_1\}}}{\langle e_1 \rangle} \subsetneq \underset{\substack{\| \\ \{0,e_1,e_2,e_1+e_2\}}}{\langle e_1, e_2 \rangle} \subsetneq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subsetneq \cdots\cdots$$

$$I_n = \{(*,\ldots,*,\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{0},*,\ldots)\} = R\langle a_1,\ldots,a_s\rangle$$

$$I_{T \subseteq \mathbb{N}} = \{(\underset{\substack{\uparrow \\ \notin T}}{*}, \underset{\substack{\uparrow \\ \in T}}{0})\}$$ ← Είναι αυτά όλα τα ιδεώδη ???

Έστω I ιδεώδη: $T = \{n \in \mathbb{N},\ \text{τ.ω.}\ \forall a \in I,\ a_n = 0\}$.

R : $r = r^4$, $\forall r \in R$ τότε πρώτα = μέγιστα.

$\left(\underset{p}{1}, \underset{p}{0}\right)^2 = \left(\underset{p'}{1}, \underset{p}{0}\right)$ ισχύει στην περίπτωσή μας.