Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Τρίτο Σύνολο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 30-11-2021

Οδηγίες: Να επιλέξετε 6 από τις ασκήσεις.

1. Βρείτε τη διάσπαση των παρακάτω αλγεβρικών συνόλων στις ανάγωγες συνιστώσες τους:
   (α΄) $V = \mathbb{V}(< x^3 + x - x^2 y - y >) \subset \mathbb{C}^2$.
   (β΄) $V = \mathbb{V}(< x^2 - y^2, x^3 + xy^2 - y^3 - x^2 y - x + y >) \subset \mathbb{C}^2$.
   (γ΄) $V = \mathbb{V}(< x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1 >) \subset \mathbb{C}^3$.

2. Έστω $V = \mathbb{V}(x^2 - y^3, y^2 - z^3) \subset \mathbb{R}^3$.
   (α΄) Δείξτε ότι η πολυωνυμική απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $t \mapsto (t^9, t^6, t^4)$ επάγει μορφισμό $\phi : \mathbb{R} \to V$ ο οποίος, ως απεικόνιση, είναι 1-1 και επί.
   (β΄) Βρείτε τον επαγόμενο ομομορφισμό $\mathbb{R}$-αλγεβρών $\tilde{\phi}$ των αντιστοίχων δακτυλίων συντεταγμένων και δείξτε ότι ο $\tilde{\phi}$ δεν είναι ισομορφισμός.
   (γ΄) Δείξτε ότι $\mathbb{I}(V) = \langle x^2 - y^3, y^2 - z^3 \rangle$ (Υπόδειξη: Από το πρώτο ερώτημα, το $\mathbb{I}(V)$ είναι ο πυρήνας τού ομομορφισμου δακτυλίων $\mathbb{R}[x, y, z] \to \mathbb{R}[t]$ με $f(x, y, z) \mapsto f(t^9, t^6, t^4)$ - κάνετε χρήση διαίρεσης στους κατάλληλους δακτυλίους πολυωνύμων).
   (δ΄) Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο V είναι ανάγωγο.

3. (α΄) Έστω $X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών χώρων (δηλ. προεικόνα κλειστών είναι κλειστά) που είναι και επί. Δείξτε ότι αν ο X είναι ανάγωγος τότε και ο Y είναι ανάγωγος.
   (β΄) Έστω $\Phi : k^n \to k^m$ μια πολυωνυμική απεικόνιση (δηλ. $\Phi = (f_1, \ldots, f_m),\ f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$). Δείξτε ότι η Φ είναι συνεχής απεικόνιση ως προς την τοπολογία Zariski.
   (γ΄) Έστω $\phi : V \to W$ ένας μορφισμός αλγεβρικών συνόλων ($V \subseteq k^n,\ W \subseteq k^m$). Δείξτε ότι ο ϕ είναι συνεχής απεικόνιση ως προς την τοπολογία Zariski. Συμπεράνατε ότι αν το V είναι ανάγωγο και ο ϕ επί τότε και το W ειναι ανάγωγο.
   (δ΄) Αποδείξτε ξανά το ερώτημα (δ΄) τής Άσκησης 2.

4. (α΄) Έστω I και $\mathfrak{p}$ ιδεώδη δακτυλίου R με $\mathfrak{p}$ πρώτο και $I \subset \mathfrak{p}$. Δείξτε ότι $R_{\mathfrak{p}}/I^e \cong (R/I)_{\overline{\mathfrak{p}}}$, όπου η επέκταση τού ιδεώδους είναι ως προς τον φυσιολογικό ομομορφισμό $R \to R_{\mathfrak{p}}$ και $\overline{\mathfrak{p}}$ είναι η εικόνα τού $\mathfrak{p}$ ως προς τον κανονικό επιμορφισμό $R \to R/I$. (Υπόδειξη: δουλέψτε όπως στο παράδειγμα που κάναμε στο μάθημα).
   (β΄) Έστω $V = V_1 \cup V_2$ με V, V_1, V_2 αλγεβρικά τού k^n και $p \in V_1 \backslash V_2$. Θέτουμε $\mathfrak{m} = \mathbb{I}(p)$ το αντίστοιχο μέγιστο ιδεώδες. Δείξτε ότι $k[V]_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong k[V_1]_{\overline{\mathfrak{m}}}$, όπου $\overline{\mathfrak{m}}$ είναι η εικόνα τού $\mathfrak{m}$ στον αντίστοιχο δακτύλιο συντεταγμένων. (Υπόδειξη: δουλέψτε όπως στο παράδειγμα που κάναμε στο μάθημα).
   (γ΄) Γράψτε στην απλούστερη δυνατή μορφή τίς τοπικοποιήσεις τού δακτυλίου συντεταγμένων $k[V]$ τού ερωτήματος (α΄) τής Άσκησης 1 στα μέγιστα ιδεώδη $\overline{\mathfrak{m}}_1 = \langle \overline{x - 1}, \overline{y - 1} \rangle$ και $\overline{\mathfrak{m}}_2 = \langle \overline{x - i}, \overline{0} \rangle$.

5. Έστω $\mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ \text{ συνεχής συνάρτηση } \}$.
   (α΄) Δείξτε ότι ο $\mathcal{C}([0, 1])$ είναι δακτύλιος με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.
   (β΄) Είναι ο $\mathcal{C}([0, 1])$ ακέραια περιοχή;

(γ') Έστω $a \in [0,1]$. Δείξτε ότι το $\mathfrak{m}_a = \{f \in \mathcal{C}([0,1]),\ f(a) = 0\}$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathcal{C}([0,1])$.

(δ') Δείξτε ότι καθε μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τού $\mathcal{C}([0,1])$ είναι τής παραπάνω μορφής, δηλ. υπάρχει $a \in [0,1]$ με $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a$ (Υπόδειξη: αν όχι, τότε για κάθε $a \in [0,1]$ υπάρχει $f_a \in \mathfrak{m}$ με $f_a(a) \neq 0$).

(ε') Ποιό είναι το ριζικό τού Jacobson τού δακτυλίου $\mathcal{C}([0,1])$;

(ϛ') Δείξτε ότι αν $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες τότε $\mathbb{V}(\mathfrak{p}) := \{a \in [0,1],\ f(a) = 0, \forall f \in \mathfrak{p}\} = \{c\}$ για κάποιο $c \in [0,1]$.

6. Έστω R ακεραία περιοχή και K το σώμα κλασμάτων του R.

   (α') Αν $a \in K$ να αποδείξετε ότι $(R : a) = \{t \in R : ta \in R\}$ είναι ιδεώδες του R.

   (β') Να αποδείξετε ότι $a \in R_P$ αν και μόνο αν $(R : a) \not\subset P$.

   (γ') Να αποδείξετε ότι
   $$R = \bigcap_{P \in \mathrm{maxSpec}(R)} R_P\ .$$

   (δ') Αν $a \neq 0$, $S = \{a^n : n \in N_{\geq 0}\}$ και $L = \{a^{2n} : n \in N_{\geq 0}\}$, να αποδείξετε ότι $S^{-1}R \cong L^{-1}R$.

7. (α') Έστω ότι $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Να εξετάσετε αν το σώμα R_P/PR_P είναι ισόμορφο με $Q(R/P)$, το σώμα κλασμάτων της ακεραίας περιοχής R/P.

   (β') Έστω R ακεραία περιοχή, $Q(R) = K$ και έστω $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Να αποδείξετε ότι $Q(R_P) = K$.

   (γ') Έστω $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $P^{(n)} = P^n R_P \cap R$. Να αποδείξετε ὀτι $P^{(n)}$ είναι P-πρωταρχικό ιδεώδες.

   (δ') Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = \Bbbk[x,y,z]/I$ όπου $I = \langle xy - z^2 \rangle$. Έστω το πρώτο ιδεώδες $P = \langle x, z\rangle/I$ του R. Να αποδείξετε ότι $x + I \in P^2 R_P \cap R$ και ότι $P^2 R_P \cap R \neq P^2$. Να περιγράψετε το ιδεώδες $P^{(2)} = P^2 R_P \cap R$.

8. Έστω S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό υποσύνολο του R. Να αποδείξετε ότι

   (α') Αν $I \triangleleft R$ τότε $\mathrm{rad}(I)S^{-1}R = \mathrm{rad}(IS^{-1}R)$.

   (β') Αν $I, J \triangleleft R$ τότε $(I + J)S^{-1}R = IS^{-1}R + JS^{-1}R$.

   (γ') Αν $I, J \triangleleft R$ τότε $(I \cap J)S^{-1}R = IS^{-1}R \cap JS^{-1}R$.

   (δ') Έστω $P, Q \in \mathrm{Spec}(R)$ και $P \subset Q$. Να αποδείξετε ότι $(R_Q)_{PR_Q} = R_P$.

   (ε') Αν $\mathrm{rad}(0) = \langle 0 \rangle$ και $P \in \mathrm{Spec}\, R$ ελάχιστο πάνω από το $\langle 0 \rangle$, να αποδείξετε ότι R_P είναι σώμα.

   (ϛ') Αν R είναι δακτύλιος της Noether τότε $S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether.

9. Έστω M ένα R-module και έστω $\phi : M \longrightarrow M$ ένας R-ομομορφισμός.

   (α') (Cayley-Hamilton) Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module και $\phi(M) \subset IM$ για κάποιο ιδεώδες I του R, να δείξετε ὀτι υπάρχουν $a_i \in I$ τέτοια ώστε $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n \,\mathrm{id}_M : M \to M$ να είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

   (β') Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και ϕ είναι επιμορφισμός, τότε να δείξετε ὀτι ο ϕ είναι ισομορφισμός. (*Υπόδειξη* Να θεωρήσετε το M ως $R' = R[x]$-module με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $xm = \phi(m)$. Να εφαρμόσετε το Θεώρημα των Cayley-Hamilton για το R'-module M, τον R'-ομομορφισμό id_M και το ιδεώδες $I = \langle x \rangle \triangleleft R'$).