Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Τμημα Μαθηματικων
Αντιμεταθετική Άλγεβρα

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων &
Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Άλγεβρα Ι

Πρώτο Σύνολο Ασκήσεων

Ημερομηνία παράδοσης: 2-11-2021

Οδηγίες: Να επιλέξετε οκτώ από τις παρακάτω ασκήσεις

1. Έστω $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

   (α΄) Να εξετάσετε αν το ιδεώδες $\langle 2 \rangle$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

   (β΄) Να εξετάσετε αν το ιδεώδες $\langle 2, 1 + i\sqrt{5} \rangle$ είναι μέγιστο ιδεώδες.

2. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος, $I, J \lhd R$, $I + J = R$. Να αποδείξετε ότι $IJ = I \cap J$. Να συμπεράνετε ότι αν I, J είναι δύο διαφορετικά μέγιστα ιδεώδη του R, τότε $IJ = I \cap J$.

3. Να αποδείξετε ότι $\langle x^5 \rangle$ είναι ανάγωγο ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$.

4. Έστω $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ και $I = \langle x^4, x^2y^5, y^3z^4 \rangle$. Να βρείτε το $\mathrm{rad}(I)$. Στη συνέχεια να βρείτε το $\mathrm{rad}(0)$ όπου 0 είναι το μηδενικό ιδεώδες του δακτυλίου πηλίκο R/I.

5. Έστω $f(x) = x^3+ax^2+bx+c \in \mathbb{Z}[x]$, p πρώτος. Να αποδείξετε ότι $P = \langle f(x), p \rangle \in \mathrm{maxSpec}(\mathbb{Z}[x])$ αν-ν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{F}_p$.

6. Έστω $\phi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και $Q \in \mathrm{Spec}(S)$. Να αποδείξετε ότι $Q^c := \{r \in R : \phi(r) \in Q\} \in \mathrm{Spec}(R)$.

7. Να αποδείξετε ότι $\langle x - 2, y - 3 \rangle \in \mathrm{maxSpec}(\mathbb{R}[x, y])$. Βρείτε το $\mathrm{rad}\langle (x - 2)^7, (y - 3)^9 \rangle$.

8. Έστω R ένας δακτύλιος, $I \lhd R$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα πρώτο ιδεώδες P του R που να περιέχει ελαχιστοτικά το ιδεώδες I, δηλ. $I \subset P$ και δεν υπάρχει $Q \in \mathrm{Spec}(R)$, τέτοιο ώστε $I \subset Q \subsetneqq P$.

9. Έστω R δακτύλιος στον οποίο κάθε στοιχείο r έχει την ιδιότητα $r^m = r$, για κάποιο $m > 1$ που εξαρτάται από το r. Να δείξετε ότι $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{maxSpec}(R)$.

10. Έστω $\Bbbk$ ένα σώμα και $R = \Bbbk[x, y]$. Να περιγράψετε το $\mathrm{Spec}(R)$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα. Έστω $P \in \mathrm{Spec}(R)$ και $A = \Bbbk(x)[y]$.

    - Αν $P \cap \Bbbk[x] = \langle 0 \rangle$, τότε να δείξετε ότι $PA \in \mathrm{Spec}(A)$. Αν $PA = \langle h(y) \rangle$ (όπου $h(y) \in A$), τότε να δείξετε ότι υπάρχει $f(x, y)$ (στοιχείο του R) πρώτο, τέτοιο ώστε $PA = \langle f(x, y) \rangle$. Να συμπεράνετε ότι $P = \langle f(x, y) \rangle$.
    - Αν $p = P \cap \Bbbk[x] = f(x)\Bbbk[x]$ και $p \neq \langle 0 \rangle$, τότε θεωρείστε το ιδεώδες $Q = f(x)R = \langle f(x) \rangle$ και δείξτε ότι $Q \in \mathrm{Spec}(R)$. Παρατηρείστε ότι $T = \Bbbk[x]/p$ είναι σώμα και δείξτε ότι υπάρχει επιμορφισμός δακτυλίων $\phi : R/Q \equiv T[y]$, άρα $\phi(P/Q) \in \mathrm{Spec}(T[y])$. Αν $\phi(P/Q) = 0$ να συμπεράνετε ότι $P = \langle f(x) \rangle$. Αν $\phi(P/Q) = \langle \overline{g(x, y)} \rangle$, να αποδείξετε ότι $P = \langle f(x), g(x, y) \rangle$.
    - Να περιγράψετε το $\mathrm{Spec}(R)$.

11. Να αποδείξετε αναλυτικά ότι ο δακτύλιος A του Παραδείγματος 3.1.3.6 δεν είναι δακτύλιος της Noether.

12. Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether να δείξετε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{rad}(\langle 0 \rangle)^n = \langle 0 \rangle$.

13. Να αποδείξετε ότι αν $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, \ldots]/\langle x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots \rangle$, τότε $\mathrm{rad}(\langle 0 \rangle) = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $x_{n+1}^n \neq 0$ και να συμπεράνετε ότι δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\mathrm{rad}(\langle 0 \rangle)^n = \langle 0 \rangle$.

14. Έστω R δακτύλιος της Noether και $\phi : R \to R$ επιμορφισμός δακτυλίων. Να αποδείξετε ότι ϕ είναι ισομορφισμός.

15. Να δείξετε ὀτι το ιδεώδες $\langle xz - y^2, yz - x^2 \rangle \notin \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y, z]$.

16. Να αποδείξετε ότι

    - αν $I \triangleleft R$, τότε $\operatorname{rad}(\operatorname{rad}(I)) = \operatorname{rad}(I)$.
    - αν $I, J \triangleleft R$, τότε $\operatorname{rad}(I \cap J) = \operatorname{rad}(I) \cap \operatorname{rad}(J)$.
    - αν $P \in \operatorname{Spec}(R)$, τότε $\operatorname{rad}(P^n) = P$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
    - αν $I, J \triangleleft R$, τότε $\operatorname{rad}(I + J) = \operatorname{rad}(\operatorname{rad}(I) + \operatorname{rad}(J))$.

17. Δείξτε ότι το σύνολο $\{(\cos t, \sin t, 1), t \in \mathbb{R}\}$ ε΄ναι αλγεβρικό υποσύνολο $\mathbb{R}^3$, ενώ το $\{(\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}\}$ δεν είναι.

18.
    - Περιγράψετε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(\langle y - x^2, z - x^3 \rangle) \subseteq \mathbb{R}^3$.
    - Βρείτε τον πυρήνα τού ομομορφισμού $\phi : \mathbb{R}[x, y, z] \to \mathbb{R}[x]$ με $\phi(f(x, y, z)) = f(x, x^2, x^3)$.
    - Δείξτε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(\langle y - x^2, z - x^3 \rangle)) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ και ότι το τελευταίο είναι πρώτο ιδεώδες.