<u>Προταση</u> Οι παρακατω συνθηκες ειναι ισοδυναμες για τον δακτυλιο R

① Αν $I \triangleleft R$ τοτε $I$ ειναι π.π. δηλ. υπαρχουν $r_1, \dots, r_n \in I$ τ.ω. $I = \langle r_1, \dots, r_n \rangle = \{ f_1 r_1 + \dots + f_n r_n : f_i \in R \}$.

② Αν $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ ειναι μια (οποιαδηποτε) αυξουσα ακολουθια ιδεωδων, τοτε η ακολουθια αυτη γινεται στασιμη, δηλ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ τ.ω. $I_N = I_{N+k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
(δηλ $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_N = I_{N+1} = \cdots$)

③ Καθε μη κενο συνολο ιδεωδων του R να εχει μεγιστικο στοιχειο. (σχεση εγκλεισμου)

<u>Απ</u>

$1) \longrightarrow 2)$ ✓

Εστω $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$

Τοτε $J = \bigcup I_i$ ειναι ιδεωδες

$J$ ειναι π.π. $\exists$ λοιπον $r_1, \dots, r_n$ τ.ω $J = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$

Εστω $r_i \in I_{s(i)}$

και εστω $N = \max\{s(1), \dots, s(n)\}$

Αρα $r_i \in I_N$, $\forall i = 1, \dots, n$

και επομενως.

$$\left.\begin{array}{l} J \subset I_N \\ \text{ομως } I_N \subset J \end{array}\right\} \Rightarrow J = I_N$$

$$\Longrightarrow I_{N+k} = I_N, \ \forall k \in \mathbb{N}$$ ✓

$2) \longrightarrow 3)$ ✓ Εστω $S \neq \emptyset$, συνολο ιδεωδων του R χωρις μεγιστικό στοιχειο.

Αφου $S \neq \emptyset$, $\exists\, I_1 \triangleleft R$ στο $S$. Απο την υποθεση υπαρχει $I_2 \in S$ τ.ω. $I_1 \subsetneq I_2$

συνεχιζοντας ...

$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ γνησια/αυξουσα απειρη ακολουθια $\longrightarrow \longleftarrow$

① 

3) $\to$ 1) Εστω $I \trianglelefteq R$, $I$ δεν ειναι πεπ. παραγ.

$$S = \{ J \trianglelefteq R : J \subset I \text{ και } J \text{ να ειναι π.π.} \}.$$

Το $S \neq \emptyset$ αφου $\langle 0 \rangle \in S$

Εστω $A$ ειναι <u>μεγιστικο στοιχειο</u> του $S$. <u>Αρα</u> $A$ ειναι π.π.

<u>Επισης</u> $A \neq I$ Επομενως $\exists\, r \in I \setminus A$ Τοτε ομως

$$\left.\begin{array}{l} A + \langle r \rangle \trianglelefteq R \\ \text{και } A + \langle r \rangle \text{ ειναι π.π.} \\ A + \langle r \rangle \subset I \end{array}\right\}$$

$$A \subsetneq \underbrace{A + \langle r \rangle}_{\ni r}$$

Αρα $A + \langle r \rangle \in S$

$\longrightarrow \longleftarrow$

Δακτυλιος της Noether. ③

Ⓐ $R$ ικανοποιει μια απο αυτες τις 3 συνθηκες

---

Υποδακτυλιος δακτυλιου της Noether $\not\Longrightarrow$ δακτυλιος Noether.

---

$$R \xrightarrow{\text{επιμορφισμος}} S$$

δακτ. Noeth.

Τοτε $S$ ειναι δ. της Noether

<u>Απ</u> (~ ασκηση).

---

<u>Προταση</u>

$R$ δ. Noeth, $I \trianglelefteq R$ τοτε $R/I$ ειναι δ. Noether.

<u>Απ</u>

Ενα τυχαιο ιδεωδες του $R/I$ ειναι της μορφης $J/I$ οπου $J \trianglelefteq R$ και $I \subset J$

Αφου $J$ ειναι π.π.

$\exists\ r_1, \dots, r_n$ τ.ω. $J = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$

και ~~αρα~~

$$J/I = \langle r_1 + I, \dots, r_n + I \rangle$$

(γιατι?).

□

---

Ερωτηση:

Εστω $J/I \trianglelefteq R/I$.

Μπορειτε να εκφρασετε $(J/I)^n$ στη μορφη $A/I$ οπου $A \trianglelefteq R$ ?

---

Συμβολισμος: $f(x) \in R[x]$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Αν $f(x) \neq 0$ και $a_n \neq 0$, $\deg f(x) = n$



γραφουμε $a_n = lc(f(x))$

μεγιστοβαθ. συντελεστης

## Θεωρημα Βασης του Hilbert

Εστω $R$ δ. της Noether.

Τοτε $R[x]$ ειναι δ. της Noether

Απ

Εστω $I \trianglelefteq R[x]$ οχι π.π.

Προφανως $I \neq \langle 0 \rangle$

Επομενως $\exists$ $f_1(x) \in I$, $f_1(x) \neq 0$

τ.ω. $\deg f_1(x)$ ελαχιστος αναμεσα σε ολα τα πολυων. του $I$

$\to I_1 = \langle f_1(x) \rangle$

$I_1 \neq I \Rightarrow \exists$ $f_2(x) \in I \setminus I_1$

τ.ω. $\deg f_2(x)$ να ειναι ελαχιστος $I \setminus I_1$

$\to I_2 = I_1 + \langle f_2(x) \rangle$

$\deg f_2(x) \geq \deg f_1(x)$

Συνεχίζουμε ..

$$f_i(x) \in I \setminus I_{i-1}.$$

και

$$I_i = I_{i-1} + \langle f_i(x) \rangle = \langle f_1(x), \dots, f_i(x) \rangle$$

και

$$\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \dots$$

Πάμε στον $R$!

$$\langle lc(f_1) \rangle \subset \langle lc(f_1), lc(f_2) \rangle \subset \dots$$

$$\subset \langle lc(f_1), \dots, lc(f_i) \rangle \subset \dots$$

$R$ δ. Noether

$\exists\ N$ τ.ω.

$$\langle lc(f_1), \dots, lc(f_N) \rangle =$$

$$\langle lc(f_1), \dots, lc(f_N), lc(f_{N+1}) \rangle$$

Επομένως

$$lc(f_{N+1}) \in \langle lc(f_1), \dots, lc(f_N) \rangle$$

άρα $\exists\ r_1, \dots, r_N \in R$ τ.ω.

$$lc(f_{N+1}) = r_1\, lc(f_1) + \dots + r_N\, lc(f_N).$$

$$g(x) = r_1 x^{d_{N+1}-d_1} f_1 + \dots + r_N x^{d_{N+1}-d_N} f_N$$

$\deg f_{N+1} =: d_{N+1}$, $d_i := \deg f_i$

$$\deg g(x) = d_{N+1}$$

$$lc\, g(x) = lc(f_{N+1})$$

Ας εξετάσουμε

$$\underbrace{f_{N+1}}_{\notin I_N} - \underbrace{g}_{\in I_N} \in I \setminus I_N \quad (\text{γιατί?})$$

$[\, f_{N+1} = (f_{N+1} - g) + g \,]$.

ΑΤΟΠΟ

$\deg(f_{N+1}-g) < \deg f_{N+1}$

$\rightarrow \leftarrow$ αφου

$f_{N+1}$ ειναι πολυωνυμο

$I \setminus I_N$ ελαχιστου βαθμου.

Αρα $I$ π.π.

$\blacksquare$

---

$R$ δ. Noeth τοτε

$R[[x]]$ ειναι δ.N.

Μελετάμε δύο παράλληλους 'κόσμους', στους οποίους αναπτύσσουμε μια παράλληλη θεωρία:

A) Ο αφφινικός χώρος $k^n$ και τα αλγεβρικα υποσύνολά του $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(< S >)$, με $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ .

B) Ο (αφηρημένος) χώρος $\mathrm{Spec(R)}$, $R$=δακτύλιος, 'των πολυωνυμικών συστημάτων':

- Κύρια παραδείγματα: $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ ή $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$.
- Στα κύρια παραδείγματα ο $\mathrm{Spec(R)}$ είναι ο χώρος των *βασικών* πολυωνυμικών συστημάτων.
- Η θεωρία στο $\mathrm{Spec(R)}$ είναι πιο ομοιόμορφη (δεν εξαρτάται τόσο από το σώμα $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, αριθμητικό σώμα κλπ).
- Όταν περνάμε στις λύσεις, τότε τα πράγματα αλλάζουν.
- Τα μέγιστα ιδεώδη τού $\mathrm{Spec(R)}$ παίζουν ένα ιδαίτερο ρόλο:

Συγκεκριμένα, αν $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ και $p = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$, πάρε τον ομομορφισμό $\phi_p : k[x_1, \ldots, x_n] \to k$ με $\phi_p(f) = f(p)$. Τότε

$$\mathrm{Ker}\phi_p = \mathbb{I}(\{p\}) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$$

μέγιστο ιδεώδες (και, μάλιστα, όταν $k$=αλγεβρικά κλειστό, αυτά είναι όλα τα μέγιστα! - συνέπεια τής NSS). Εχουμε επομένως

$$f \in \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \text{ αν και μόνον αν } f(p) = 0.$$

Αφαιρετικά, αν $a \in R$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)}$ το ότι $a \in \mathfrak{p}$ θα είναι το αντίστοιχο τού $f(p) = 0$. Επομένως, αν $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ (αντ. $S \subseteq R$), το ανάλογο τού $\mathbb{V}(S) = \{p \in k^n, \ \ f(p) = 0, \, \forall f \in S\} \subseteq k^n$ είναι το

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)}, \ \mathrm{S} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Επίσης, αν $A \subseteq k^n$ (αντ. $A \subseteq \mathrm{Spec(R)}$), το ανάλογο τού $\mathbb{I}(A) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n], \ f(p) = 0, \ \forall p \in A\}$ είναι το

$$\mathbb{I}_R(A) := \{a \in R, a \in \mathfrak{p}, \ \forall \mathfrak{p} \in A\} = \cap_{\mathfrak{p} \in A} \mathfrak{p}.$$

**Σημείωση**

Τα $\mathbb{I}(A)$ και $\mathbb{I}_R(A)$ είναι ριζικά ιδεώδη των δακτυλίων $k[x_1, \ldots, x_n]$ και $R$, αντιστοίχως.

### Ορισμός

Μια τοπολογία σε ένα σύνολο $X$ δίδεται από μία οικογένεια $\mathcal{U}$ (η οποία θα λέγεται οικογένεια ανοικτών τού $X$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.
- Αν $U_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ τότε $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{U}$.
- Αν $U_1, \ldots, U_r \in \mathcal{U}$ τότε $\cap_{i=1}^r U_i \in \mathcal{U}$.

Τό $(X, \mathcal{U})$ λέγεται τοπολογικός χώρος.

### Παράδειγμα

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{$οποιαδήποτε ένωση ανοικτών διαστημάτων$\} \cup \{\emptyset\}$.

...

### Παράδειγμα

Στο $X = k$ $=\mathbb{R}$ σώμα, το $\mathcal{U} = \{\emptyset, k, B^c, \text{ με } \#B < \infty\}$ (δηλ. τα συμπληρώματα των αλγεβρικών υποσυνόλων τού $k$). ....

→ ορίζει τοπολογία

(μη Hausdorff, το $k$ συμπαγής ...)

### Ορισμός

Ένα υποσυνολο $V$ ενός τοπολογικού χώρου $X$ λέγεται κλειστό αν είναι συμπλήρωμα ανοικτού.

Επομένως μπορώ να ορίσω τοπολογία σε χώρο $X$ ορίζοντας την οικογένεια $\mathcal{V}$ των κλειστών του. Αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $\emptyset, X \in \mathcal{V}$.
- Αν $V_\alpha \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ τότε $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \in \mathcal{V}$.
- Αν $V_1, \ldots, V_r \in \mathcal{V}$ τότε $\cup_{i=1}^{r} V_i \in \mathcal{V}$.

### Επαγόμενη τοπολογία σε υποσύνολο

Έστω $X$ ένας τοπολογικός χώρος και $Y \subset X$. Η τοπολογία του $X$ επάγει τοπολογία στο $Y$ όπου τα ανοικτά είναι οι τομές ανοικτών τού $X$ με το $Y$.

### Σημείωση:

- Αν $Y = U$ ανοικτό τού $X$, τότε τα ανοικτά τής επαγόμενης τοπολογίας στο $Y$ είναι ακριβώς τα ανοικτά (στο $X$) υποσύνολα τού $U$.
- Αν $Y = T$ κλειστό τού $X$, τότε τα κλειστά τής επαγόμενης τοπολογίας στο $Y$ είναι ακριβώς τα κλειστά (στο $X$) υποσύνολα τού $T$.

### Πρόταση

Παίρνοντας ως οικογένεια κλειστών τού $k^n$ (αντιστ. τού $\mathrm{Spec(R)}$) τα

$$\{\mathbb{V}(S),\ S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]\}$$

(αντιστ. τα

$$\{\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S),\ S \subseteq R\}),$$

ορίζεται μια τοπολογία στο $k^n$ (αντιστ. τού $\mathrm{Spec(R)}$). Ονομάζεται τοπολογία Zariski.

### Σημείωση

Είναι μια ‘παράξενη’ τοπολογία, αλλά είναι ακριβώς αυτή που χρειάζεται για να κανει τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : k^n \to k$ συνεχείς συναρτήσεις (εδώ τα $k^n$ και $k$ είναι εφοδιασμένα με την τοπολογία Zariski)

δηλ. προεικόνες κλειστών είναι κλειστά

$\{0\} \in K$, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{V}(f)$ κλειστό

$c \in K$, $f^{-1}(\{c\}) = \mathbb{V}(f - c)$ κλειστο.

Αρα αν $B = \{c_1, .., c_r\}$ κλειστο στο $K$, τοτε $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathbb{V}(f - c_i)$.
κλειστο.

### Ερωτημα

Έστω $a \in R$. Υπάρχει το αντίστοιχο τής πολυωνυμικής συνάρτησης $\phi_a : \mathrm{Spec(R)} \to$κάποιο σώμα;

ναι, αλλα πιο σύνθετο
?

### Ορισμός

Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τοτε η κλειστή θήκη τού $A$ ορίζεται ως

$$\overline{A} = \cap_{A \subseteq V \text{ κλειστό}} V.$$

Ειδικότερα, αν $A$ κλειστό τότε $\overline{A} = A$.

### Πρόταση

α) • Έστω $A \subseteq k^n$. Τότε $\mathbb{V}\mathbb{I}(A) = \overline{A}$.

β) • Έστω $A \subseteq \mathrm{Spec(R)}$. Τότε $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}\mathbb{I}_R(A) = \overline{A}$.

### Απόδειξη

[Υπενθύμιση: $\overline{A} := \cap_{A \subseteq V \text{ κλειστό}} V$] ...

Ταυτολογίες $I \trianglelefteq k[x_1, .., x_n]$, $\mathbb{I}\,\underset{\cup|}{\overset{k^n}{\mathbb{V}}}(I) \supseteq I$, $A \subseteq k^n$, $\mathbb{V}(\mathbb{I}(A)) \supseteq A$

$I \leq R$, $\mathbb{I}_R \mathbb{V}_{\mathrm{Spec}\,R}(I) = \mathbb{I}_R\{p \in \mathrm{Spec}R,\ I \subseteq p\} = \bigcap_{\substack{p \in \mathrm{Spec}R \\ I \subseteq p}} p = \mathrm{Rad}\,I \supseteq I$

$A \subseteq \mathrm{Spec}R$, $\mathbb{V}_{\mathrm{SpeR}}\mathbb{I}_R(A) \supseteq A$ $\underrightarrow{\ }$ δείτε.

## Συνέχεια τής απόδειξης

ΠV

$A \subseteq V$ αλγ. ορσ.

α) $A \subseteq k^n$, $\boxed{\overline{A} = V(I(A))}$

"$\subseteq$" $A \subseteq V(I(A)) \Rightarrow \overline{A} \subseteq \underbrace{V(I(A))}_{\text{κλειστό}} = V(I(A))$

"$\supseteq$" Δείχνω ότι αν $A \subseteq V = V(I)$ τότε $V(I(A)) \subseteq V(I)$

Έχω $I \subseteq I(V(I)) \subseteq I(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(I) \supseteq V(I(A))$ ✓.

β) Ομοίως.....