$I \triangleleft R$.

Ιδεωδη του R/I

<u>Εστω</u>

$\to A \triangleleft R/I$

$J_A = \{ r \in R : r+I \in A \} \subset R$

Το $J_A \triangleleft R$ και $I \subset J_A$

$\overline{0}_{R/I} = I = 0+I = \underset{r \in I}{r+I}$

<u>Αντιστροφα</u>

αν $I \subset J$ $\quad I, J \triangleleft R$.

τοτε $A_J = \{ r+I : r \in J \} \triangleleft R/I$

1 - 1 ιδεωδη του R/I
και στα ιδεωδη του R
που περιεχουν το I

$J/I := A_J$

<u>Ασκηση</u>. $P \in Spec(R)$
και $I \subset P$ τοτε $\Longleftrightarrow$
$P/I \in Spec(R/I)$

<u>Απ</u>
"$\Rightarrow$"
$ab+I$
Εστω $\underbrace{(a+I)(b+I)}$ $\in P/I$
τοτε Π.Ν.Δ. $a+I$
ή $b+I$ $\in P/I$

...

<u>Προταση</u> $Spec(R) \neq \emptyset$

<u>Πορισμα</u>. Εστω $I \underset{\neq}{\triangleleft} R$
Τοτε $\exists$ $P \in Spec(R)$
Τ.ω. $I \subseteq P$

Απ $Spec(R/I) \neq \emptyset$

Άρα $\exists \; P/I \in Spec(R/I)$

$\Rightarrow P \in Spec(R)$ και $I \subset P$.

Πρόταση. $rad(\langle 0 \rangle) = \bigcap\limits_{P \in Spec(R)} P$

Πόρισμα $rad(I) = \bigcap\limits_{\substack{P \in Spec(R) \\ I \subset P}} P$

Απ

(Πρόταση στον R/I).

$rad(\langle \bar{0} \rangle_{R/I}) = \{ f+I : (f+I)^n = I, \; n \in \mathbb{N}_0 \}$

$= \{ f+I : f^n + I = I, \; n \in \mathbb{N} \}$

$= \{ f+I : f^n \in I, \; n \in \mathbb{N} \}$.

~~Άρα~~

$rad(\langle \bar{0} \rangle) = \bigcap\limits_{\substack{P \in Spec(R) \\ I \subset P}} P/I$.

"$\subset$" $rad(I) \subset \bigcap\limits_{\substack{P \in Spec(R) \\ I \subset P}} P$

Έστω $g \in rad(I) \Rightarrow g^m \in I, \; m \in \mathbb{N}$

Αν $I \subset P \in Spec(R)$

$g^m \in P \Rightarrow g \in P$

"$\supset$" Έστω $f \in \bigcap\limits_{\substack{I \subset P \\ P \in Spec R}} P$ Τότε

$f + I \in P/I \Longrightarrow$

$\forall\, P/I \in Spec(R/I)$

$\Rightarrow f + I \in rad(\langle 0_{R/I} \rangle)$

$\Rightarrow f^n \in I$

Ορισμός

I ανάγωγο ιδεώδες αν-ν

$I = I_1 \cap I_2$ τότε $I = I_1$ ή $I = I_2$

Παρατήρηση

(1) P πρώτο ιδεώδες $\Longrightarrow$ P ανάγωγο.

Πράγματι έστω $P = I_1 \cap I_2 \supset I_1 I_2$

έχουμε λοιπόν

$I_1 I_2 \subset P \xrightarrow[\text{πρώτο}]{P} I_1 \subset P$ ή $I_2 \subset P$

Άρα $P = I_1$ ή $P = I_2$.

(2) I ανάγωγο $\not\Longrightarrow$ (όχι πάντα) I πρώτο.

Παραδείγματα

$R = \mathbb{Z}$.

$rad(I) = I = \langle 6 \rangle = \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle$

όχι ανάγωγο, όχι πρώτο

$J = \langle 4 \rangle$ ← ανάγωγο

$rad(J) = \langle 2 \rangle$.

$J \notin Spec(R)$

---

* R δακτύλιος της Noether.

I ριζικό ιδεώδες, ανάγωγο, τότε I πρώτο

Δακτύλιοι της Noether

Αύξουσα ακολουθία ιδεωδών.
ακολουθία

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$

$I_j \trianglelefteq R$

στατική αν υπάρχει $N \in \mathbb{N}$

τ.ω. $I_N = I_{N+1} = \cdots$

I_{N+k}, $\forall k \in \mathbb{N}$

Πρόταση. Τ.Π.Ε.Ι.
για τον δακτύλιο R

1. Κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών γίνεται στατική.
2. Κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών του R έχει μέγιστο στοιχείο.
3. Κάθε ιδεώδες του R είναι πεπερασμ. παραγόμενο.

Απ (αργότερα)

Οποιοσδήποτε δακτύλιος που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες λέγεται δ. της Noether.

Παραδ.

1. $\mathbb{K}$ ← σώμα δ. Noeth
$\langle 0 \rangle$, $\mathbb{K} = \langle 1 \rangle$

2. Π.Κ.Ι είναι δ. Noeth.
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[x]$
σώμα

3. θεώρημα βάσης του Hilbert
R δακτ. της Noeth.
τότε $R[x]$ δ. της Noeth.

$R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$

στοιχεια ?

$\langle x_1 \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle \subset \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

$\subset \dots$

<u>ΔΕΝ</u> ειναι δακτυλιος της Noether.

Διασταση του Krull

$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdot \subsetneq P_n$

$n =$ μηκος αυτης της ακολουθιας

$P_i \in Spec(R)$

$dim(R)$ μεγιστο μηκος μιας τετοιας ακολουθιας.

- $\dim \mathbb{K} = 0$

$\mathbb{K}$ σωμα

- $\dim \mathbb{Z} = 1.$
- $\dim \mathbb{K}[x] = 1$

σωμα.

Έστω $I_1, \ldots, I_n$ ιδεώδη δακτυλίου R. Ορίζουμε:

- $I_1 + \cdots + I_n = \{a_1 + \cdots + a_n,\ a_j \in I_j\}$
- $I_1 \cdots I_n = \{\sum a_1 \cdots a_n,\ a_j \in I_j\}$
- Βασικες Ιδιότητες:

$$I_j \subseteq I_1 + \cdots + I_n, \quad \forall j$$

$$I_1 \cdots I_n \subseteq I_1 \cap \cdots \cap I_n$$

Ασκηση: $\mathrm{Rad}(I_1 \cdots I_n) = \mathrm{Rad}(I_1 \cap \cdots \cap I_n)$

Ερώτημα

Έστω I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ άπειρη οικογένεια ιδεωδών δακτυλίου R. Γενικεύονται οι παραπάνω ορισμοί με τρόπο ώστε να διατηρούν τις Βασικές Ιδιότητες;

$\sum_{\alpha \in A} I_\alpha = \{$ πεπερ. αθροίσματα στοιχείων από τα $I_\alpha \}$

$\prod_{\alpha \in A} I_\alpha = \{$ πεπερ. αθροίσματα γινομένων πεπερ. στοιχείων από τα $I_\alpha \}$

→ Είναι ιδεώδες :

→ $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha \underset{?}{\subseteq} \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ ΟΧΙ

Ερώτημα

Έστω I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ άπειρη οικογένεια ιδεωδών δακτυλίου R. Γενικεύονται οι παραπάνω ορισμοί με τρόπο ώστε να διατηρούν τις Βασικές Ιδιότητες;

Απαντηση

....

Έστω $S, T \subset R$.

- $< S >= \sum_{a \in S} < a >$.
- $< S \cup T >=< S > + < T >$.
- $< \{ab, \;\; a \in S, \; b \in T\} >=< S >< T >$.

Ορισμός

Έστω $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, k=σώμα. Τα υποσύνολα τού k^n τής μορφής

$$\mathbb{V}(S) := \{(a_1, \dots, a_n), \ \ f(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \ \forall f \in S\}$$

λέγονται αλγεβρικά υποσύνολα τού k^n / αφφινικές (k-) ποικιλότητες.

Σημείωση

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(< S >) = \mathbb{V}(< f_1, \dots, f_s >) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s),$$

όπου $< S >=< f_1, \dots, f_s >$ από το Θεώρημα Βάσης τού Hilbert.

Ερώτημα

Ποιά είναι τα αλγεβρικά υποσύνολα τού k (δηλ. $n = 1$):

k, $\emptyset$, $\{a_1, \dots, a_s\} \subseteq k$ πεπερασμένο

$\qquad \| $

$\mathbb{V}(\{(x-a_1)\cdots(x-a_s)\})$.

Πρόταση

α) • Έστω I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ οικογένεια ιδεωδών τού $k[x_1, \dots, x_n]$. Τότε

$$\cap_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{V}(I_\alpha) = \mathbb{V}(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha).$$

β) • Έστω $I_1, \dots, I_r$ ιδεώδη τού τού $k[x_1, \dots, x_n]$. Τότε

$$\cup_{k=1}^r \mathbb{V}(I_k) = \mathbb{V}(\Pi_{k=1}^r I_k) \overset{\checkmark}{=} \mathbb{V}(\cap_{k=1}^r I_k).$$

ίδια ρίζικα

Απόδειξη

α) $\subseteq$, $\supseteq$ ✓

β) $\subseteq$: $\prod_{k=1}^{r} I_k \subseteq I_k$, $\forall k$. $\Rightarrow \mathbb{V}(\prod_{k=1}^{r} I_k) \supseteq \mathbb{V}(I_k)$, $\forall k$

$\supseteq$: Έστω $p \in \mathbb{V}(\prod_{k=1}^{r} I_k)$ με $p \notin \mathbb{V}(I_k)$, $\forall k$. Φτάνω σε άτοπο

Τότε $\forall k$, $\exists f_k \in I_k$ με $f_k(p) \neq 0$. $\Rightarrow \underbrace{(f_1 \cdots f_r)}_{\in \prod_{k=1}^{n} I_k}(p) \neq 0$ ↯

Πρόταση

- Έστω I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ οικογένεια ιδεωδών τού $k[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε

$$\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{V}(I_\alpha) = \mathbb{V}(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha).$$

- Έστω $I_1, \ldots, I_r$ ιδεώδη τού τού $k[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε

$$\cup_{k=1}^{r} \mathbb{V}(I_k) = \mathbb{V}(\Pi_{k=1}^{r} I_k) = \mathbb{V}(\cap_{k=1}^{r} I_k).$$

Απόδειξη

...

~~Συνέχεια απόδειξης~~

…

→ Σημ.: Απειρες ενώσεις αλγεβρικών, εν γενει, δεν ειναι αλγεβρικα υποσυνολα.

π.χ. $\mathbb{Z} \subseteq k = \mathbb{C}$ όχι αλγεβρικο.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\{m\}}_{\text{αλγεβρικα}}$$

Παραδείγματα από Spec(R)

- $R = \mathbb{C}[x]$: $\mathrm{Spec}(R) = \{ \langle x-a \rangle , a \in \mathbb{C} \} \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{C}$

- $R = \mathbb{R}[x]$: $\mathrm{Spec}(R) = \{ \langle f(x) \rangle , \text{ανάγωγο} \} \hookleftarrow \mathbb{R}$

  $\langle x-a \rangle \longleftarrow a$

- $R = \mathbb{R}[x, y]$: $\mathrm{Spec}\, \mathbb{R}[x,y] \supseteq \langle x \rangle , \langle x, y \rangle , \langle x-a, y-b \rangle$, μέγιστα

  $= \mathbb{R}[y][x]$

  $\mathbb{R}^2 \quad (a,b)$

- $R = \mathbb{C}[x, y]$:

  $= \mathbb{C}[y][x]$

- $k^n \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n])$. $(a_1, \ldots, a_n) \to \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ μέγιστο

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]) =$

$\langle 0 \rangle$

$\langle f(x) \rangle$, ανάγωγο

$\langle f(x), p \rangle$, πρώτος

ανάγωγο ως πολυώνυμο του $\mathbb{Z}_p[x]$.

$\left(k[x_1, \dots, x_n] \right)$

Ορισμός

Έστω R δακτύλιος και $S \subset R$. Ορίζουμε

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)},\ \ \mathrm{S} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Ορισμός

Έστω R δακτύλιος και $S \subset R$. Ορίζουμε

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)},\ \ \mathrm{S} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Σημείωση

1. Αν $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, $S \subseteq R$ και $\mathfrak{p} =< x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n >$ τότε $S \subseteq \mathfrak{p} \Longleftrightarrow f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \ \forall f \in S$.
2. $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(< S >) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\mathrm{Rad} < S >)$.

$\langle S \rangle \subseteq P \Rightarrow \mathrm{Rad}(S) \subseteq \mathrm{Rad}\, P = P$

Ορισμός

Έστω R δακτύλιος και $S \subset R$. Ορίζουμε

$$\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(R)}, \;\; \mathrm{S} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

$V(S) \subseteq k^n$

Σημείωση

1. Αν $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, $S \subseteq R$ και $\mathfrak{p} = < x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n >$ τότε $S \subseteq \mathfrak{p} \iff f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \;\; \forall f \in S$.
2. $\mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(S) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(< S >) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\mathrm{Rad} < S >)$.

Πρόταση

- Έστω I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ οικογένεια ιδεωδών τού R. Τότε

$$\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(I_\alpha) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha).$$

ευκολη

- Έστω $I_1, \ldots, I_r$ ιδεώδη τού τού R. Τότε

$\checkmark$

προσπαθηστε

$$\cup_{k=1}^{r} \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(I_k) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\Pi_{k=1}^{r} I_k) = \mathbb{V}_{\mathrm{Spec(R)}}(\cap_{k=1}^{r} I_k).$$