Υπαρχουν παντα πρωτα ιδεωδη ?

Spec(R) συνολο πρωτων ιδεωδων του R

maxSpec(R) μεγιστα ιδεωδη

Στοχος Spec(R) $\neq \emptyset$

Λημμα του Zorn. Εστω $A \neq \emptyset$ μερικως διατεταγμενο "$\leq$" συνολο, τετοιο ωστε καθε αλυσιδα του A να εχει ανω φραγμα στο A. Τοτε το A εχει μεγιστικο στοιχειο.

S αλυσιδα στο A: ολικα διατεταγμενο υποσυνολο του A. ~~τ~~

: $\exists\, b \in A$ τ.ω. $a \leq b$ $\forall a \in S$

Θεωρημα maxSpec(R) $\neq \emptyset$ ($\Longrightarrow$ Spec(R) $\neq \emptyset$)

Απ.

Εστω $A = \{ I \trianglelefteq_{\neq} R : \}$

Εστω $I, J \in A$

"$\leq$" $I \leq J$ αν $I \subset J$

$A \neq \emptyset$ αφου $\langle 0 \rangle \in A$

Εστω S αλυσιδα

Το συνολο $J = \bigcup_{I \in S} I$ ειναι ιδεωδες* του R (γιατι?) και ανηκει στο A. Και J ειναι ανω φραγμα. Αρα το A εχει μεγιστικο στοιχειο.

Το $J \neq R$ γιατι διαφορετικα $1 \in J \Rightarrow$ $1 \in I_j \Rightarrow \Leftarrow$.

Εστω $I \trianglelefteq R$.

$rad(I) = \{ f \in R : f^n \in I,$ για καποιο $n \in \mathbb{N} \}$.

Προτασ.

$rad(I) \trianglelefteq R$ .. (γιατι;)

$I \subset rad(I)$.

I λεγεται ριζικο ιδεωδες οταν το $I = rad(I)$.

Ερωτηση Ποτε $rad(I) = R$?

Παραδειγματα.

① Εστω P πρωτο ιδεωδες. Τοτε $rad(P) = P$.

Απ

Εστω $f \in rad(P) \Rightarrow f^n \in P$ για καποιο $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in P$.

② Υπαρχουν ριζικα ιδεωδ. που δεν ειναι πρωτα.

Παρ $\langle xy \rangle$ στον $\mathbb{K}[x,y]$ (σωμα) ριζικο οχι πρωτο (γιατι?)

③ $R = \mathbb{Z}$, $I = \langle 12 \rangle$.

$J = rad(I)$.

Εστω $f \in J \Rightarrow$ $f^n \in I \Rightarrow f^n = 12m$ ($3 \cdot 4$) για καποιο $m \in R$

$\Rightarrow 3 \mid f^n \Rightarrow 3 \mid f$

Επισης

$2 \mid f^n \Rightarrow 2 \mid f$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f \in \langle 3 \rangle \\ f \in \langle 2 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle = \langle 2 \rangle \cdot \langle 3 \rangle = \langle 6 \rangle$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} J \subset \langle 6 \rangle \\ \langle 6 \rangle \subset J \end{array}\right\} \Rightarrow J = \langle 6 \rangle$$

4) $\mathbb{K}[x, y, z]$.

$I = \langle x^2, y^2 \rangle$

$\text{rad}(I)$.

$\text{rad}(0) = \{ f \in R : f^n = 0 \}$.

Προταση

$$\text{rad}(0) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$$

Λημμα

Εστω U πολλαπλασιαστικά κλειστο υποσυνολο του R, $1 \in U$

Εστω $T = \{ I \triangleleft R : I \cap U = \emptyset \}$. Αν $T \neq \emptyset$ τοτε $\exists$ $Q \in T \cap \text{Spec}(R)$

Απ

Συμφωνα με το λημμα του Zorn.

Το T έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω Q.
(Θα δείξουμε ότι $Q \in \mathrm{Spec}(R)$)

Έστω $f, g \in R$ τ.ω.
$\underline{fg \in Q}$ με $f, g \notin Q$

$Q + \langle f \rangle \supsetneq Q$

$Q + \langle g \rangle \supsetneq Q$

Άρα $Q + \langle f \rangle \cap U \neq \emptyset$

$Q + \langle g \rangle \cap U \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\ a \in (Q + \langle f \rangle) \cap U$

$b \in (Q + \langle g \rangle) \cap U$

$\Rightarrow \underline{ab} \in U$.

Όμως

$a = q_1 + f \cdot h, \quad q_1 \in Q, \ h \in R$

$b = q_2 + g \cdot t, \quad q_2 \in Q, \ t \in R$.

$\Rightarrow \underline{a \cdot b} = \underbrace{q_1 q_2}_{\in Q} + \underbrace{f h q_2}_{\in Q} + \underbrace{q_1 g t}_{\in Q} + \underbrace{fg\, ht}_{\in Q}$.

$\Rightarrow ab \in Q$

Αφού $ab \in U$

$\Rightarrow Q \cap U \neq \emptyset \rightarrow\leftarrow$

Αφού $Q \in T$.

$\blacksquare$

Αποδειξη της Προτασης:

$J = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$

$rad(0) \subset J$

$f \in rad(0) \Rightarrow f^n = 0$
για καποιο $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$f^n \in P$, $\forall P \in Spec(R)$,
$\Rightarrow f \in P$

Για $J \subset rad(0)$:

$f \in J$
Αν $f \notin rad(0)$ τοτε

$U = \{f^n : n \geq 0\} \ni f$
πολλαπλ. κλειστο και

$U \cap \langle 0 \rangle = \emptyset$

~~Αρα~~
$T = \{I \triangleleft R : I \cap U = \emptyset\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\ Q \in Spec(R) \cap T$,

$\frac{\text{ΑΤΟΠΟ}}{(\text{γιατι?})}$

Το $f \in J \Rightarrow f \in Q$.

ΤΕΛΟ

A10 - ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, Χειμερινό εξάμηνο 2021-22

Αλέξης Κουβιδάκης

Τρίτη 19 Οκτωβρίου 2021

Έστω k σώμα και $k[x_1, \dots, x_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος. Θα μελετήσουμε συστήματα πολυωνυμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $f_i \in K[x_1, \dots, x_n],\ i = 1, \dots, s$.

Ερώτημα

Τι μπορούμε να πούμε για τις λύσεις τού παραπάνω συστήματος;

Ορισμός

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) := \{(a_1, \dots a_n) \in k^n \text{ με } f_i(a_1, \dots, a_n) = 0,\ \forall i = 1, \dots, s\}.$$

Για να αναπτύξουμε μια καλή θεωρία θα πρέπει να δώσουμε στο σύστημά μας δομή ιδεώδους

$$I =< f_1, \dots, f_s >= \{\sum_{i=1}^{s} h_i f_i,\ h_i \in k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Παρατήρηση

$$\mathbb{V}(\underbrace{< f_1, \dots, f_s >}_{I}) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s).$$

Ορισμός

Τα παραπάνω λέγονται *αλγεβρικά (υπο)σύνολα* τού k^n.

Ειδικότερα,

- **Ερώτημα 1:** Πότε το σύστημα έχει λύση.
- **Ερώτημα 2:** Πώς σχετίζονται δύο συστήματα που έχουν τις ίδιες λύσεις.
- **Γενικότερα:** Τί μπορούμε να πούμε για τη Γεωμετρία - Τοπολογία τού χώρου των λύσεων ($\subseteq k^n$).

Σε πρώτη φάση, για να αναπτύξουμε μια 'καλή θεωρία' θα πρέπει να δουλέψουμε σε αλγεβρικα κλειστά σώματα (πχ. $k = \mathbb{C}$). Υπάρχουν όμως και πολύ ενδιαφέροντα (άπειρα) μή αλγεβρικά κλειστά σώματα πχ. το $\mathbb{Q}$. Για να αναπτύξουμε μια 'καλή θεωρία' που να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις, δίδουμε έμφαση στο χώρο των εξισώσεων. Προς τούτο εστιάσουμε στο (με $R = k[x_1, \dots, x_n]$)

$\rightsquigarrow \mathbb{V}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{V}(I)$

$$\mathrm{Spec}(R/I) \text{ "} = \text{"} \{\mathfrak{p} \text{ πρώτο ιδεώδες τού } R \text{ με } I \subseteq \mathfrak{p}\} \subseteq \mathrm{Spec}(R).$$

- Το k^n εφοδιάζεται με μια τοπολογία ως προς την οποία οι πολυωνυμικές καθίστανται συνεχείς συναρτήσεις και της οποίας τα κλειστά σύνολα είναι τα αλγεβρικά υποσύνολα.
- Η παραπάνω τοπολογία τού k^n επάγει αντίστοιχη τοπολογία στα $\mathbb{V}(I) \subseteq k^n$.
- Έχοντας αυτό, θα μπορούμε να ορίσουμε έννοιες, όπως πχ,η διάσταση τού $\mathbb{V}(I)$.
- Αντιστοίχως, ο χώρος $\mathrm{Spec}(R)$ εφοδιάζεται με μια ανάλογη τοπολογία.
- Αυτή με τη σειρά της επάγει αντίστοιχη τοπολογία στα (κλειστά υποσύνολα) $\mathrm{Spec}(R/I) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$.
- Μπορούμε ομοίως να ορίσουμε πχ. διάσταση τού $\mathrm{Spec}(R/I)$.
- Και θα δούμε ότι στην περίπτωση k=αλγεβρικά κλειστό, οι παραπάνω έννοιες είναι συμβατές μεταξύ τους δηλ. οι αντίστοιχες διαστάσεις συμπίπτουν.
- Επίσης θα δούμε ότι βασικά Θεωρήματα που αφορούν το $\mathbb{V}(I)$ (όπως η NSS) που ισχύουν μόνο για αλγεβρικά κλειστά σώματα, μπορούν να επαναδιατυπωθούν στον $\mathrm{Spec}(R/I)$ και να ισχύουν για κάθε σώμα.
- Αυτή είναι η απαρχή τής θεωρίας τών Schemes.

Υποθέτουμε $k = \mathbb{C}$.

Ε.Π.

$n = 1$

$\mathbb{V}(f_1(x), \ldots, f_s(x)) = \mathbb{V}(d(x))$, για κάποιο $d(x) \in \mathbb{C}[x]$ (ποιό;).

$d(x) = \mu\kappa\delta(f_1(x), \ldots, f_s(x))$ ← Δείξτε το!

$n \geq 2$

Έστω $d(x_1, \ldots, x_n) =$μ.κ.δ.$(f_1, \ldots, f_s)$. Τότε

$f_i = d \cdot h_i$

$$\mathbb{V}(d(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$$

$n \geq 2$

Έστω $d(x_1, \ldots, x_n) =$μ.κ.δ.$(f_1, \ldots, f_s)$. Τότε

$$\mathbb{V}(d(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$$

$$\not\supseteq$$

αλλά δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο.

Παράδειγμα ($n = s = 2$)

$K[x_1, x_2]$

$f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2.$

$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ λυση το $(0,0)$, μκδ$(x_1, x_2) = 1$

$n \geq 2$

Έστω $d(x_1, \ldots, x_n) =$μ.κ.δ.$(f_1, \ldots, f_s)$. Τότε

$$\mathbb{V}(d(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$$

αλλά δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο.

Παράδειγμα $(n = s = 2)$

$f_1(x_1, x_2) = x_1, \;\; f_2(x_1, x_2) = x_2.$

Θεώρημα Α

$\mathbb{V}(I) \neq \emptyset \iff 1 \notin I (\iff I \neq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s]).$

n

$n \geq 2$

Έστω $d(x_1, \ldots, x_n) =$μ.κ.δ.$(f_1, \ldots, f_s)$. Τότε

$$\mathbb{V}(d(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$$

αλλά δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο.

Παράδειγμα ($n = s = 2$)

$f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2.$

Θεώρημα Α

$\mathbb{V}(I) \neq \emptyset \iff 1 \notin I (\iff I \neq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s])$. Επομένως το αρχικό σύστημα (1) δεν έχει λύση, αν και μόνον αν, υπάρχει συνδυασμός των $f_1, \ldots, f_s$ με συντελεστές πολυώνυμα που να ισούται με το σταθερό πολυώνυμο 1.

Σημείωση

Η κατεύθυνση '$\Longrightarrow$' είναι εύκολη. : $1 \in I \Rightarrow \mathbb{V}(I) = \emptyset$

Επιβεβαιώνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση $n = 1$.

$n \geq 2$

Έστω $d(x_1, \ldots, x_n) =$μ.κ.δ.$(f_1, \ldots, f_s)$. Τότε

$$\mathbb{V}(d(x_1, \ldots, x_n)) \subseteq \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s)$$

αλλά δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο.

Παράδειγμα ($n = s = 2$)

$f_1(x_1, x_2) = x_1, \;\; f_2(x_1, x_2) = x_2.$

Θεώρημα Α

$\mathbb{V}(I) \neq \emptyset \iff 1 \notin I (\iff I \neq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_s])$. Επομένως το αρχικό σύστημα (1) δεν έχει λύση, αν και μόνον αν, υπάρχει συνδυασμός των $f_1, \ldots, f_s$ με συντελεστές πολυώνυμα που να ισούται με το σταθερό πολυώνυμο 1.

Σημείωση

Η κατεύθυνση '$\Longrightarrow$' είναι εύκολη.

Επιβεβαιώνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση $n = 1$. Κατ' αρχάς,

$$< f_1(x), \ldots, f_s(x) > = < d(x) > .$$

Οπως έχουμε πεί παραπάνω, το σύστημα δεν έχει λύση, αν και μόνον αν, $d(X) = 1$. Από την άλλη πλευρά, το παραπάνω Θεώρημα λέγει ότι το σύστημα δεν έχει λύση, αν και μόνον αν,

$$1 \in < d(X) > \iff 1 = g(X)\, d(X) \iff d(X) = \text{ σταθερό πολυώνυμο, άρα } = 1.$$

Υποθέτουμε $k = \mathbb{C}$.

Έστω (Σ) και (Σ') συστήματα πολυωνυμικών εξισώσεων με $\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma')$, πώς σχετίζονται τα συστήματα (Σ) και (Σ'); Η απάντηση θα δωθεί ως εκφραση των ιδεωδών $I =< \Sigma >$ και $I' =< \Sigma' >$.

$n = 1$

- Έστω $\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma') = \{a_1, \dots, a_r\}$.
- $< \Sigma > = < d(x) >, \; < \Sigma' > = < d'(x) >$.
- $d(x) = c(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_r)^{n_r}$ και $d'(x) = c(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$.
- Οι αναλύσεις έχουν την ίδια βάση. Ισοδύναμα

$$\mathrm{Rad}(< d(x) >) = \mathrm{Rad}(< d'(x) >)(=< (x - a_1) \cdots (x - a_r) > .)$$

$\mathrm{Rad}(< \Sigma >) = \mathrm{Rad}(\Sigma >)$

Υποθέτουμε $k = \mathbb{C}$.

Έστω (Σ) και (Σ') συστήματα πολυωνυμικών εξισώσεων με $\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma')$, πώς σχετίζονται τα συστήματα (Σ) και (Σ'); Η απάντηση θα δωθεί ως εκφραση των ιδεωδών $I =< \Sigma >$ και $I' =< \Sigma' >$.

$n = 1$

- Έστω $\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma') = \{a_1, \ldots, a_r\}$.
- $< \Sigma >=< d(x) >$, $< \Sigma' >=< d'(x) >$.
- $d(x) = c(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_r)^{n_r}$ και $d'(x) = c(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$.
- Οι αναλύσεις έχουν την ίδια βάση. Ισοδύναμα

$$\mathrm{Rad}(< d(x) >) = \mathrm{Rad}(< d'(x) >)(=< (x - a_1) \cdots (x - a_r) > .$$

Θεώρημα Β

$$\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma') \text{ αν και μόνον αν } \mathrm{Rad}(< \Sigma >) = \mathrm{Rad}(< \Sigma' >).$$

Σημείωση

Η κατεύθυνση '$\Longleftarrow$' είναι εύκολη λόγω τού ότι

άσκηση!!

$f^4(a)=0 \iff f(a)=0$

$$\underline{\mathbb{V}(<\Sigma>) = \mathbb{V}(\mathrm{Rad}(<\Sigma>))}.$$

Η άλλη κατεύθυνση είναι μη τετριμμένη και είναι συνέπεια του Θεωρήματος Nullstellensatz.

Πρόταση

Σημείωση

Η κατεύθυνση '$\Longleftarrow$' είναι εύκολη λόγω τού ότι

$$\mathbb{V}(<\Sigma>) = \mathbb{V}(\mathrm{Rad}(<\Sigma>)).$$

Η άλλη κατεύθυνση είναι μη τετριμμένη και είναι συνέπεια του Θεωρήματος Nullstellensatz.

Πρόταση

Θεώρημα Β συνεπάγεται Θεώρημα Α.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε την κατεύθυνση '$\Longleftarrow$' στο Θεώρημα Α: $1 \notin I \Longrightarrow \mathbb{V}(I) \neq \emptyset$. Με εις άτοπον....

Αν $V(I) = \emptyset \; (= \mathbb{V}(\langle 1 \rangle)) \Rightarrow \mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\langle 1 \rangle)$

$\overset{B}{\Longrightarrow} \mathrm{Rad}\, I = \underset{\langle 1 \rangle}{\underset{\parallel}{\mathrm{Rad}\langle 1 \rangle}} \overset{?}{\Longrightarrow} I = \langle 1 \rangle \Rightarrow 1 \in I.$

Για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός $\rightarrow K^n$

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε $\rightarrow \mathbb{I}(A)$ ριζικό ιδεώδες $\leftarrow$ Άσκηση!

$$\mathbb{I}(A) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n], \text{ όπου } f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A\}. \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$$

π.χ. $n=1$, $A=\{a\}$ τότε $\mathbb{I}(A) = \langle x-a \rangle$.

Nullstellensatz (NSS)

Για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \overset{\to K^n}{\mathbb{C}^n}$. Ορίζουμε

$$\mathbb{I}(A) := \{f \in K[x_1, \dots, x_n],\ \text{όπου } f(a_1, \dots, a_n) = 0,\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in A\}.$$

Nullstellensatz ($K = \mathbb{C}$)

Έστω I ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Τότε $\mathbb{I}\underbrace{\mathbb{V}(I)}_{\subseteq \mathbb{C}^n} = \mathrm{Rad}(I)$.

Πρόταση

Για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε

$$\mathbb{I}(A) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n],\ \text{όπου } f(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A\}.$$

Nullstellensatz

Έστω I ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε $\mathbb{IV}(I) = \mathrm{Rad}(I)$.

(ΔΕΙΤΕ ΟΤΙ $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathbb{IV}(I)$)

Πρόταση

Nullstellensatz συνεπάγεται Θεώρημα B.

Απόδειξη

Για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε

$$\mathbb{I}(A) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n],\ \text{όπου } f(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A\}.$$

Nullstellensatz

Έστω I ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Τότε $\mathbb{I}\mathbb{V}(I) = \mathrm{Rad}(I)$.

Πρόταση

Nullstellensatz συνεπάγεται Θεώρημα Β.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε την κατεύθυνση '$\Longrightarrow$' στο Θεώρημα Β:
$\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma') \Longrightarrow \mathrm{Rad}(<\Sigma>) = \mathrm{Rad}(<\Sigma'>)$ .....

$\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\Sigma') \Rightarrow \mathbb{V}(<\Sigma>) = \mathbb{V}(<\Sigma'>) \Rightarrow$

$\mathbb{I}\mathbb{V}(<\Sigma>) = \mathbb{I}\mathbb{V}(<\Sigma'>) \overset{NSS}{\Longrightarrow} \mathrm{Rad}(<\Sigma>) = \mathrm{Rad}(<\Sigma'>)$.