ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

10η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 30/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Απαντησεις 1ου Φυλλαδιου

Άσκηση 1

Άσκηση

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Θα εργαστούμε με επαγωγή. Για $n = 1$, η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για κάποιο n (ΕΥ). Αυτό σημαίνει ότι

$$9 \mid 4^n + 15n - 1 \iff 4^n + 15n - 1 = 9k \iff 4^n = 9k - 15n + 1,$$

για κάποιο $k \in \mathbf{Z}$. Τότε για $n+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 14 &\overset{\text{ΕΥ}}{=} 4(9k - 15n + 1) + 15n + 14 \\ &= 36k - 45n + 18 = 9(4k - 5n + 2). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 2

Άσκηση

Αποδείξτε τον τύπο αθροίσματος γεωμετρικής προόδου, ότι δηλαδή για κάθε αριθμό $r \neq 1$ και ακέραιο $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Η πρόταση είναι προφανής για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n (ΕΥ). Τότε για $n + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} r^i = r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} r^i &\overset{\text{ΕΥ}}{=} r^{n+1} + \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{r^{n+1}(r-1) + r^{n+1} - 1}{r - 1} = \frac{r^{n+2} - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι για κάθε n:

- $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$.
- $3 \mid n^3 - 7n + 3$.
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n+1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+2} i \cdot 2^i &= (n+2)2^{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i \overset{\text{ΕΥ}}{=} (n+2) \cdot 2^{n+2} + n \cdot 2^{n+2} + 2 \\
&= 2n \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} + 2 = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2 \\
&= (n+1) \cdot 2^{n+3} + 2.
\end{aligned}$$

Άσκηση 3

- Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 7(n+1) + 3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 7n - 7 + 3 \\ &\overset{\text{ΕΥ}}{=} (3k + 7n - 3) + 3n^2 - 4n - 3 = 3 \cdot (k + n^2 + n - 2).\end{aligned}$$

- Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &\overset{\text{ΕΥ}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Άσκηση

Έστω $e_0, e_1, e_2, \ldots$ ακολουθία που ορίζεται ως εξής:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = 2, \quad e_2 = 3,$$
$$e_k = e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}, \text{ για } k \geq 3.$$

Δείξτε ότι $e_n \leq 3^n$ για κάθε $n \geq 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή. Παρατηρούμε ότι πράγματι $e_n \leq 3^n$ για $n = 0, 1, 2$. Υποθέτουμε ότι $e_k \leq 3^k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$ για κάποιο $n \geq 2$ (ΕΥ). Τότε για $n+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + e_{n-2} &\overset{\text{ΕΥ}}{\leq} 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} \\ &< 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Άσκηση

Αν $f(x) = xe^x$ και $g(x) = e^{cx}$, δείξτε ότι οι n-στες παράγωγοί τους είναι $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ και $g^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$ αντίστοιχα.

Για $n = 0$ ισχύουν και οι δύο προτάσεις. Έστω ότι ισχύουν για n (ΕΥ). Τότε για $n+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = ((x+n)e^x)' = (x+n)'e^x + (x+n)(e^x)' \\ &= e^x + (x+n)e^x = (x+(n+1))e^x, \end{aligned}$$

και

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = \left(c^n e^{cx}\right)' = c^n c e^{cx} = c^{n+1}e^{cx}.$$

Άσκηση 6

Άσκηση

Το τριόμινο είναι παρόμοιο με το ντόμινο, αλλά αποτελείται από τρία κομμάτια σε σχήμα Γ. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα της οποίας λείπει ένα οποιοδήποτε τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί από κομμάτια τριόμινο.

Άσκηση 7

Άσκηση

Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με $n \geq 3$ κορυφές είναι $(n-2)\pi$.

Άσκηση

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \cup B = [n]$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subset B$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $\emptyset \subset A \subset B$;

Άσκηση 8

Προκειμένου να έχουμε $A \subseteq B \subseteq [n]$, για κάθε στοιχείο $x \in [n]$ έχουμε τις εξής επιλογές:

1. $x \in A, x \in B$,
2. $x \in B, x \notin A$,
3. $x \notin B, x \notin A$.

Εφόσον έχουμε συνολικά n τέτοια στοιχεία, συνολικά οι επιλογές μας είναι

$$\underbrace{3 \cdots 3}_{n \text{ φορές}} = 3^n.$$

Άσκηση 8

Προκειμένου να έχουμε $A \cup B \subseteq [n]$, για κάθε στοιχείο $x \in [n]$ έχουμε τις εξής επιλογές:

1. $x \in A, x \in B$,
2. $x \in B, x \notin A$,
3. $x \notin B, x \in A$.

Εφόσον έχουμε συνολικά n τέτοια στοιχεία, συνολικά οι επιλογές μας είναι

$$\underbrace{3 \cdots 3}_{n \text{ φορές}} = 3^n.$$

Άσκηση 8

Προκειμένου να έχουμε $A \subset B \subseteq [n]$, αρκεί να μετρήσουμε τις επιλογές μας για να πάρουμε $A \subseteq B \subseteq [n]$ και από αυτές να αφαιρέσουμε εκείνες όπου $A = B$.

Τον πρώτο αριθμό τον υπολογίσαμε (σε προηγούμενο ερώτημα) ως 3^n και, όσον αφορά στον δεύτερο, εύκολα βλέπουμε ότι ουσιαστικά ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$, δηλαδή με 2^n.

Επομένως η απάντηση είναι

$$3^n - 2^n.$$

Άσκηση 8

Εδώ θέλουμε $\emptyset \subset A \subset B$. Μπορούμε να σκεφτούμε όπως πριν, απλά επίσης να αφαιρέσουμε και την περίπτωση $B \subseteq [n]$ και $A = \emptyset$ που συμβαίνει ακριβώς 2^n φορές. Θα πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι η περίπτωση (και μόνο αυτή) $A = B = \emptyset$ έχει αφαιρεθεί δύο φορές.

Καταλήγουμε ότι η απάντηση είναι

$$3^n - 2^n - 2^n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 1.$$

Άσκηση 10

Άσκηση

Αν από μια 8×8 σκακιέρα βγάλουμε δυο αντιδιαμετρικά γωνιακά τετράγωνα, με πόσους τρόπους μπορούμε να καλύψουμε ακριβώς την σκακιέρα με (μη επικαλυπτόμενα μεταξύ τους) ντόμινο.

Άσκηση 11

Άσκηση

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 5$, $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-2}$.

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 5$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \geq 5$ (ΕΥ). Τότε για $n+1$ έχουμε:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1}.$$

Από την ΕΥ, έχουμε $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-2}$, ενώ $\frac{2n+1}{n+1} < 2$. Καταλήγουμε ότι

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < 2^{2n-2} \cdot 2^2 = 2^{2(n+1)-2}.$$

Άσκηση 12

Άσκηση

Πόσοι θετικοί ακέραιοι n υπάρχουν με $n \mid 4800$ και $4 \nmid n$;

Έχουμε ότι $4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$. Επομένως έχουμε ότι $n \mid 4800 \iff n = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, με $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 1$ και $0 \leq k \leq 2$. Ταυτόχρονα $4 = 2^2 \nmid n \iff i < 2$. Άρα για να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί, αρκεί $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 1$ και $0 \leq k \leq 2$, οπότε έχουμε 2 επιλογές για το i, 2 επιλογές για το j και 3 επιλογές για το k.

Συνολικά έχουμε

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

επιλογές.

Άσκηση 13

Άσκηση

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 0$,
$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Για $n = 0$ η πρόταση ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n (ΕΥ). Για $n+1$, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &\overset{\text{ΕΥ}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 14

Άσκηση

Αν $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, να βρείτε το πλήθος των αρτίων και των περιττών συναρτήσεων $f : A \to A$; (Μια συνάρτηση f είναι *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$ και είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.)

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα $\mathcal{A} = \{f : A \to A, f \text{ άρτια}\}$ και $\mathcal{B} = \{g : \{0, 1, \ldots, n\} \to A\}$, ως εξής:

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \ : \ f(x) \mapsto g(x) = f\,|_{\{0,1,\ldots,n\}}$$

$$\mathcal{B} \to \mathcal{A} \ : \ g(x) \mapsto f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ g(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Επομένως $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = |A^{\{0,1,\ldots,n\}}| = |A|^{|\{0,1,\ldots,n\}|} = (2n+1)^{n+1}$.

Άσκηση 14

Για τις περιττές συναρτήσεις παρατηρούμε ότι επειδή αν f περιττή έχουμε ότι $f(0) = 0$, επομένως (ομοίως με πριν) η αντιστοιχία θα είναι ανάμεσα στις περιττές $f : A \to A$ και στις συναρτήσεις $\{1, \ldots, n\} \to A$ που είναι $(2n + 1)^n$ το πλήθος.

Άσκηση 15

Άσκηση

Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα A με χωρητικότητα 80 αριθμημένων θέσεων και την αίθουσα B με χωρητικότητα 40 αριθμημένων θέσεων.

1. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.
2. Έστω ότι από τους (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Άσκηση 15

1. Ο πρώτος φοιτητής έχει 120 θέσεις να επιλέξει. Ο δεύτερος 119 κ.ο.κ.. Έτσι έχουμε συνολικά $120 \cdot 119 \cdots 21 = \frac{120!}{20!}$ επιλογές.

Άσκηση 15

2. Θα πάρουμε δύο περιπτώσεις:

   i Τα αγόρια κάθονται στην αίθουσα A. Τότε (με την ίδια λογική με πριν) τα αγόρια θα κάτσουν με $\frac{80!}{40!}$ τρόπους, ενώ τα 60 κορίτσια θα κάτσουν στις υπόλοιπες 80 θέσεις με $\frac{80!}{20!}$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $\frac{80!}{40!} \cdot \frac{80!}{20!}$ τρόπους.

   ii Τα αγόρια κάθονται στην αίθουσα B. Τότε η αίθουσα αυτή θα γεμίσει με τα αγόρια με 40! τρόπους και τα κορίτσια θα κάτσουν στην A με $\frac{80!}{20!}$ τρόπους. Συνολικά θα έχουμε $40! \cdot \frac{80!}{20!}$ τρόπους.

Καταλήγουμε ότι συνολικά θα έχουμε

$$\frac{80!}{40!} \cdot \frac{80!}{20!} + 40! \cdot \frac{80!}{20!} = \frac{80!}{20!} \cdot \left(\frac{80!}{40!} + 40!\right)$$

τρόπους.

Άσκηση 16

Άσκηση

Στα παρακάτω ερωτήματα δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$, με τους παρακάτω περιορισμούς;

- Χωρίς περιορισμούς.
- Οι αριθμοί να είναι < 4000.
- Οι αριθμοί να είναι άρτιοι.
- Οι αριθμοί να είναι περιττοί.
- Πολλαπλάσια του 5.
- Οι αριθμοί να περιέχουν και το ψηφίο 5 και το ψηφίο 3.

Άσκηση 16

- Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 6 επιλογές, για το δεύτερο 5, για το τρίτο 4 και για το τέταρτο 3. Συνολικά $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.
- Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 3 επιλογές (1, 2, 3), για το δεύτερο 5, για το τρίτο 4 και για το τέταρτο 3. Συνολικά $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.
- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 2 επιλογές (2, 8), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

Άσκηση 16

- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 4 επιλογές (1, 3, 5, 7), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.
  Εναλλακτικά, έχουμε όλες τις επιλογές εκτός των άρτιων, δηλαδή $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.
- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 1 επιλογή (5), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.
- Έχουμε 4 τρόπους να τοποθετήσουμε το ψηφίο 5 (σε μια από τις 4 θέσεις) και 3 τρόπους να τοποθετήσουμε το ψηφίο 3 (σε μια από τις υπόλοιπες 3 θέσεις). Η πρώτη από τις υπόλοιπες θέσεις μπορεί να πληρωθεί με 4 τρόπους και η δεύτερη με 3. Συνολικά θα έχουμε $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.