MEM241 - Διακριτα Μαθηματικα

4η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 09/10/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Αρχη Πολλαπλασιασμου

Ένα παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γκαρνταρόμπα με 3 παντελόνια $\{p_1, p_2, p_3\}$ και 2 πουκάμισα $\{s_1, s_2\}$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι δυνατές επιλογές για να συνδυάσουμε τα παραπάνω είναι οι εξής:

$$\{p_1, s_1\}, \{p_1, s_2\}, \{p_2, s_1\}, \{p_2, s_2\}\{p_3, s_1\} \text{ και } \{p_3, s_2\}.$$

Με άλλα λόγια έχουμε 6 συνδυασμούς. Αφού παρατηρήσουμε τον τρόπο που κάναμε τους συνδυασμούς, παρατηρούμε ότι $6 = 3 \cdot 2$. Μάλιστα ισχύει κάτι γενικότερο.

Η πολλαπλασιαστική αρχή

Θεώρημα (Πολλαπλασιαστική αρχή)

Έστω σύνολα $E_1, \ldots, E_k$ *τέτοια ώστε* $|E_i| < \infty$ *για κάθε* i*. Αν* $E = \{(x_1, \ldots, x_k) \ : \ x_i \in E_i, i = 1, \ldots, k\}$*, τότε*

$$|E| = |E_1| \cdots |E_k|.$$

Για την απόδειξη θα εργαστούμε με επαγωγή στο k. Για $k = 1$ η πρόταση είναι προφανής.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $k = n$.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $k = n + 1$.

Η πολλαπλασιαστική αρχή

Με άλλα λόγια θέλω να μετρήσω τα αντικείμενα της μορφής $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, όπου $x_j \in E_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$. Έστω $E_{n+1} = \{e_1, \ldots, e_r\}$. Για $j \in \{1, \ldots, r\}$, θέτουμε

$$G_j := \{(x_1, \ldots, x_n, x_n + 1) \in E \ : \ x_{n+1} = e_j\}.$$

Για $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$G_i \to G_j, \ (x_1, \ldots, x_n, e_i) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, e_j)$$

είναι 1-1 και επί, επομένως $|G_i| = |G_j|$. Ακόμα είναι ξεκάθαρο ότι $G_i \cap G_j = \emptyset$, αν $i \neq j$, ενώ κάθε στοιχείο ανήκει ακριβώς σε ένα εκ των $G_1, \ldots, G_r$.

Καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}|E| &= |G_1| + \cdots + |G_r| = \underbrace{|G_1| + \cdots + |G_1|}_{r \text{ φορές}}\\ &= |G_1| \cdot r = |G_1| \cdot |E_{n+1}|.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι

$$|G_1| = |\{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in E_i, 1 \leq i \leq n\}| = |E_1| \cdots |E_n|,$$

που απορρέει από την ΕΥ.

Μερικές εφαρμογές

Πρόταση

Αν $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ η ανάλυση σε πρώτους του αριθμού n, τότε ο n έχει $(n_1 + 1) \cdots (n_k + 1)$ το πλήθος (θετικούς) διαιρέτες.

Απόδειξη.

Από την θεωρία αριθμών γνωρίζουμε ότι $d \mid n$ αν και μόνο αν $d = p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k}$ για κάποιους $0 \leq d_i \leq n_i$. Επομένως κάθε διαιρέτης αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο της μορφής $(d_1, \ldots, d_k)$, όπου $d_i \in \{0, \ldots, n_i\}$. Το ζητούμενο έπεται από την πολλαπλασιαστική αρχή.

Παράδειγμα

Επειδή $100 = 2^2 \cdot 5^2$, *το* 100 *έχει ακριβώς* 9 *θετικούς διαιρέτες.*

Μερικές εφαρμογές

Παράδειγμα

Αποδείξτε με την πολλαπλασιαστική αρχή, ότι αν $|A| = n$, τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Χβγ, γράφουμε $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στα υποσύνολα του A και των n-άδων $(x_1, \ldots, x_n)$, με $x_i \in \{0, 1\}$, ως εξής:

$$B \subseteq A \ : \ B \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n), \ : \ x_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B, \\ 0, & a_i \notin B. \end{cases}$$

Καταλήγουμε ότι $|\mathcal{P}(A)| = |\{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \{0, 1\}\}|$. Το τελευταίο, βάσει της πολλαπλασιαστικής αρχής ισούται με

$$\underbrace{2 \cdots 2}_{n \text{ φορές}} = 2^n.$$

Ορισμός

Αν A, B δύο σύνολα, ορίζουμε ως B^A το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο B.

$$B^A := \{f : A \to B\}.$$

Μερικές εφαρμογές

Πρόταση

Αν A και B πεπερασμένα, τότε $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Εξ' ορισμού, κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο του B, άρα έχουμε $|B|$ επιλογές για την απεικόνισή του. Καθώς έχουμε $|A|$ τέτοια στοιχεία, από την πολλαπλασιαστική αρχή, καταλήγουμε ότι συνολικά έχουμε

$$\underbrace{|B| \cdots |B|}_{|A| \text{ φορές}} = |B|^{|A|}$$

επιλογές για την απεικόνιση ολόκληρου του A στο B.

Ημιανεξαρτητες Επιλογες

Ορισμός - Διαφορά με ανεξάρτητες επιλογές

Στα προηγούμενα παραδείγματα, μετρούσαμε το πλήθος των δυνατών επιλογών κάποιων συντεταγμένων, που όμως η επιλογή της μιας δεν επηρέαζε την επιλογή της άλλης. Όμως κάποιες φορές υπάρχει αλληλεπίδραση.

Ορισμός

Δύο επιλογές λέγονται ημιανεξάρτητες αν η επιλογή της μιας επηρεάζει την επιλογή της άλλης, αλλά σε κάθε περίπτωση των πλήθος των δυνατών επιλογών παραμένει σταθερό.

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιούμε την πολλαπλασιαστική αρχή κανονικά.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Αν έχουμε 7 άνδρες και 5 γυναίκες με πόσους τρόπους μπορούμε να παντρέψουμε και τις 5 γυναίκες (χωρίς να επιτρέψουμε πολυγαμία).

- Η πρώτη γυναίκα έχει 7 επιλογές.
- Η δεύτερη γυναίκα έχει 6 επιλογές (όλους τους άνδρες, εκτός εκείνου που διάλεξε η πρώτη).

  $\vdots$
- Η πέμπτη γυναίκα έχει 3 επιλογές.

Έτσι, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Πόσες 1-1 συναρτήσεις υπάρχουν από το $[m] = \{1, \ldots, m\}$ *στο* $[n] = \{1, \ldots, n\}$*; (*$m \leq n$*)*

- Το 1 έχει n επιλογές.
- Το 2 έχει $n - 1$ επιλογές (ολόκληρο το $[n]$ εκτός της απεικόνισης του 1).

  $\vdots$
- Το m έχει $n - m + 1$ επιλογές.

Έτσι, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ επιλογές.

Διατεταγμενες Επιλογες – Μεταθεσεις Συνολου

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την απαρίθμηση των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε, κατά διατεταγμένο τρόπο, r στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων και στην συνέχεια με το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου n στοιχείων.

Παρατήρηση

Με τον όρο μετάθεση εννοούμε την διάταξη όλων των στοιχείων ενός συνόλου σε σειρά (1ο στοιχείο, 2ο στοιχείο κτλ.).

Πλήθος διατεταγμένων r-άδων

Πρόταση

Το πλήθος των διατεταγμένων r-άδων $(x_1, \ldots, x_r)$ με $x_i \in [n]$ διαφορετικά ανά δύο, είναι

$$n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

- Το x_1 έχει n επιλογές.
- Το x_2 έχει $n-1$ επιλογές (ολόκληρο το $[n]$ εκτός της επιλογής του x_1).

  $\vdots$
- Το x_r έχει $n-r+1$ επιλογές.

Το ζητούμενο έπεται από την πολλαπλασιαστική αρχή.

Πλήθος μεταθέσεων συνόλου

Πόρισμα

Το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου μεγέθους n είναι

$$n! := 1 \cdot 2 \cdots n.$$

- Η απόδειξη του παραπάνω είναι άμεση από την προηγούμενη πρόταση, αν θεωρήσουμε $r = n$.
- Ο αριθμός $n!$ ονομάζεται n παραγοντικό.
- Ορίζουμε $0! = 1$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$*; Με πόσους τα ψηφία* $1, 1, 3, 4, 5$*;*

- Για το πρώτο ερώτημα, πρόκειται απλά για τις μεταθέσεις 5 στοιχείων, επομένως έχουμε $5!$ τέτοιες διατάξεις.
- Για το δεύτερο ερώτημα, ξεκινάμε όπως και πριν, οπότε για αρχή έχουμε και πάλι $5!$ τέτοιες διατάξεις. Όμως παρατηρούμε ότι εμφανίζεται δύο φορές ο αριθμός 1. Οπότε στις $5!$ διατάξεις έχουμε διπλομετρήσεις. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε διάταξη όπου έχει τον αριθμό 1 στις θέσεις i και j έχει μετρηθεί δύο φορές, επομένως το πραγματικό πλήθος των διατάξεων είναι $5!/2$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα ψηφία $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5$;

Όπως και πριν ξεκινάμε με $8!$ διατάξεις.

Ας πάρουμε τώρα μια διάταξη που εμφανίζεται το 1 στις θέσεις i, j, k. Πόσες φορές έχουμε μετρήσει αυτήν την διάταξη στο αρχικό μας μέτρημα; Για να το φανταστούμε αυτό εύκολα, αριθμούμε τα τρία αρχικά “1” ως $1_a, 1_b, 1_c$ και καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά έχουμε μετρήσει κάθε δυνατή μετάθεση αυτών των τριών στοιχείων στις θέσεις i, j, k. Καταλήγουμε ότι την διάταξη αυτή την έχουμε μετρήσει $3!$ φορές.

Παραδείγματα

Με αντίστοιχο συλλογισμό, βλέπουμε ότι έχουμε μετρήσει 2! φορές κάθε διάταξη (λόγω των δύο εμφανίσεων του αριθμού "2").

Επομένως, η απάντησή μας είναι ότι θα έχουμε συνολικά

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!}$$

διατάξεις.

Μένουμε Ασφαλείς!