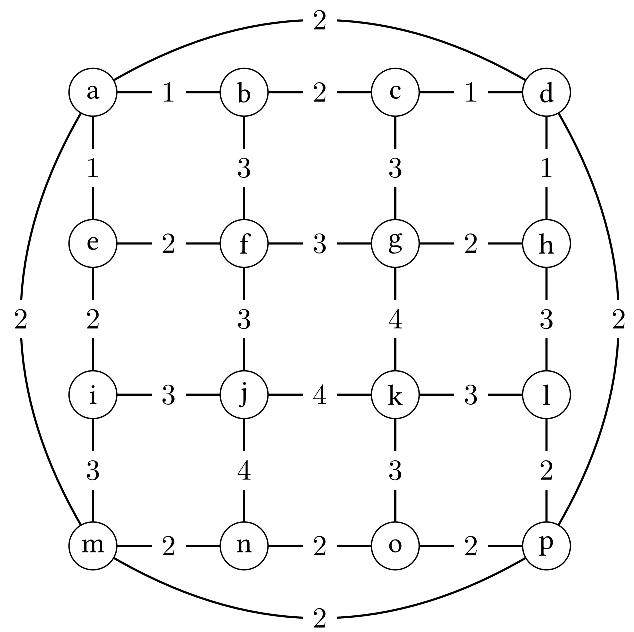
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΕΜ241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

4ο σετ ασκήσεων (Διμερή γραφήματα και ταιριάσματα)

Άσκηση 1. Δείξτε ότι αν στο γράφημα G υπάρχουν s κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε $\chi(G) \leq n - s + 1$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Απάντηση. Χρωματίζουμε το γράφημα ως εξής: εφόσον υπάρχουν s κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο χρώμα για τον χρωματισμό αυτών των κορυφών, ενώ χρησιμοποιούμε από ένα διαφορετικό χρώμα για κάθεμία από τις υπόλοιπες $n-s$ κορυφές. Καταλήγουμε με έναν χρωματισμό του γραφήματος που δύο γειτονικές κορυφές έχουν χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα και έχουν χρησιμοποιηθεί συνολικά $n - s + 1$ χρώματα. Το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 2. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Dijkstra για να βρείτε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την κορυφή a στην κορυφή k και από την κορυφή e στην κορυφή l στο παρακάτω γράφημα:



Απάντηση. Καταρχάς παρατηρούμε ότι από τον τρόπο που λειτουργεί ο αλγόριθμος του Dijkstra δεν είναι μοναδικός ο τρόπος εξέλιξης του αλγόριθμου, οπότε ενδέχεται κάποιος να ακολουθήσει διαφορετικά βήματα από αυτά που θα περιγράψουμε εδώ, αλλά να είναι ορθή η εκτέλεση του αλγόριθμου.

Έτσι εδώ, ο αλγόριθμος μπορεί διαδοχικά να ελέγξει (για την περίπτωση από την a στην k) με την σειρά τις εξής κορυφές:

a, e, b, d, m, f, i, c, h, p, n, g, j, o, l, k

και εν τέλει θα άπουμε ότι ένα μονοπάτι ελάχιστου βάρους από την a στην k είναι το

$$\mathrm{a} \to \mathrm{d} \to \mathrm{h} \to \mathrm{g} \to \mathrm{k}\,,$$

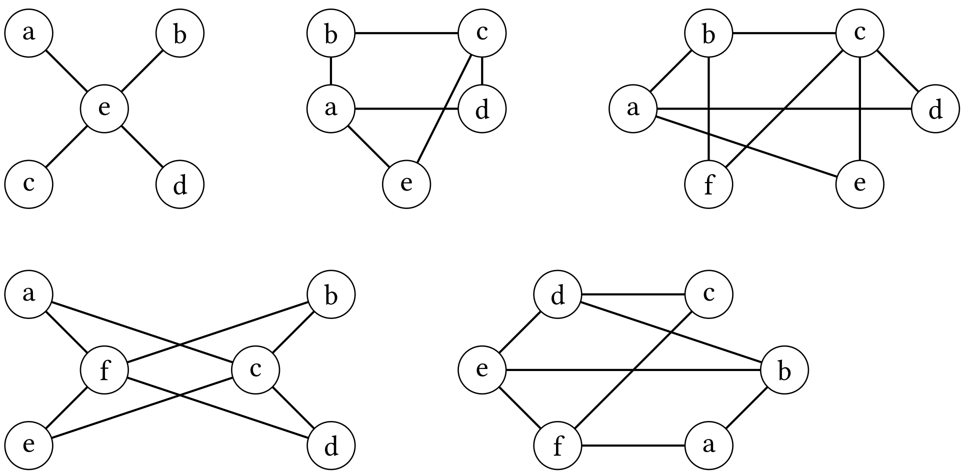
το οποίο έχει βάρος 9.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και στην περίπτωση του μονοπατιού από την e στην l. Για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά τα βήματα του αλγόριθμου, δείτε το βίντεο της 26ης διάλεξης. □

Άσκηση 3. Δείξτε ότι ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους.

Απάντηση. Η λύση υπάρχει στις λύσεις του Φυλλαδίου 3. □

Άσκηση 4. Βρείτε τον χρωματικό αριθμό των παρακάτω γραφημάτων και εξετάστε αν είναι διμερή.



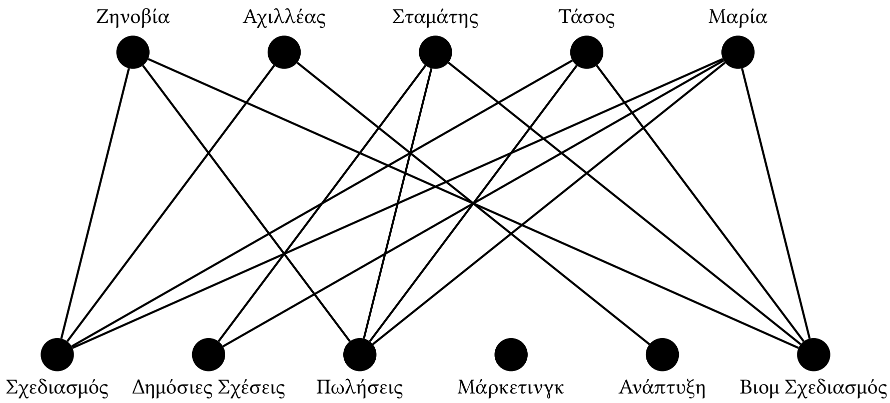
Απάντηση. Κατασκευαστικά βλέπουμε ότι τα δύο γραφήματα που βρίσκονται στα δεξιά άκρα (πάνω και κάτω) έχουν χρωματικό αριθμό 3 και τα άλλα τρία γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό 2. Από γνωστό θεώρημα, αυτά με χρωματικό αριθμό 2 θα είναι διμερή, ενώ τα άλλα όχι. □

Άσκηση 5. Μια εταιρεία έχει 5 εργαζόμενους: Ζηνοβία, Αχιλλέας, Σταμάτης, Τάσος και Μαρία. Κάθε εργαζόμενος θα αναλάβει ένα από τα παρακάτω πόστα: Σχεδιασμός, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις, Μάρκετινγκ, Ανάπτυξη, Βιομηχανικός σχεδιασμός.

Η Ζηνοβία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Αχιλλέας μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό ή Ανάπτυξη. Ο Σταμάτης μπορεί να αναλάβει Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Τάσος μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Τέλος, η Μαρία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό.

i. Μοντελοποιήστε τις ικανότητες των εργαζομένων σε ένα διμερές γράφημα.
ii. Δώστε σε κάθε εργαζόμενο ένα πόστο που μπορεί να αναλάβει.

Απάντηση. Μοντελοποιούμε τις ικανότητες των εργαζομένων στο παρακάτω διάγραμμα.



Ξεκινάμε με το ταίριασμα Ζηνωβία-Πωλήσεις, Αχιλλέας-Σχεδιασμός, Σταμάτης-Βιομ. Σχεδιασμός και Μαρία-Δημ. Σχέσεις. Εύκολα βλέπουμε ότι το παραπάνω ταίριασμα δεν είναι πλήρες, ενώ παρατηρούμε ότι το μονοπάτι

$$\text{Τάσος} \to \text{Σχεδιασμός} \to \text{Αχιλλέας} \to \text{Ανάπτυξη}$$

είναι ένα επαυξάνον μονοπάτι του παραπάνω ταιριάσματος, άρα το ταίριασμά μας μπορεί να βελτιωθεί στο: Ζηνωβία-Πωλήσεις, Τάσος-Σχεδιασμός, Αχιλλέας-Ανάπτυξη Σταμάτης-Βιομ. Σχεδιασμός και Μαρία-Δημ. Σχέσεις. Μάλιστα το ταίριασμα αυτό είναι πλήρες. □

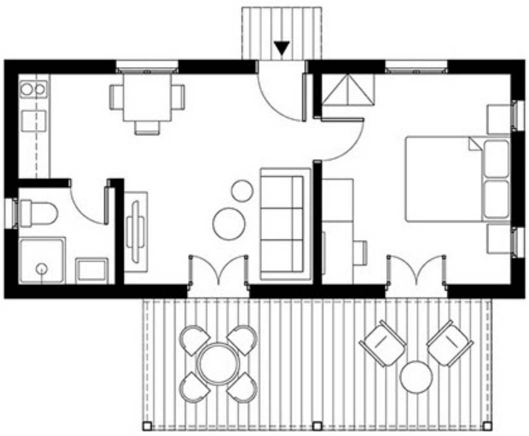
Άσκηση 6. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας, του οποίου οι εγγραφές βρίσκονται στο σύνολο $\{0, 1\}$. Ονομάζουμε *ευθεία* του πίνακα μια γραμμή ή μια στήλη του. Δείξτε ότι το ελάχιστο πλήθος ευθειών που περιέχει όλα τα 1 του πίνακα είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος των 1 που δεν βρίσκονται ανά δύο στην ίδια ευθεία.

Απάντηση. Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα, με κορυφές $R_1, \dots, R_m$ και $C_1, \dots, C_n$, όπου η κορυφή R_i αντιστοιχεί στην i-στή γραμμή του A και η κορυφή C_j στην j-στή στήλη του A και θα έχουμε ότι το γράφημα θα περιέχει την ακμή $\{R_i, C_j\}$ αν και μόνο αν $A_{i,j} = 1$.

Με άλλα λόγια, το γράφημα έχει για κορυφές τις ευθείες του πίνακα και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν τέμνονται σε “1”, δηλαδή κάθε “1” είναι μια ακμή του γραφήματος.

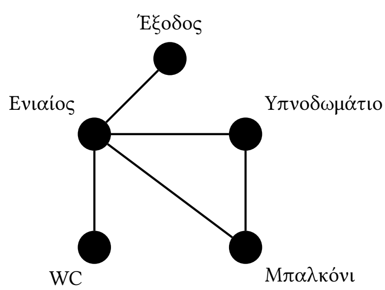
Εύκολα βλέπουμε ότι η επιλογή κάποιων “1” που δεν βρίσκονται ανά δύο στην ίδια ευθεία αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα του γραφήματος, ενώ η επιλογή ευθειών που περιέχουν όλα τα “1” αντιστοιχεί σε ένα κάλυμμα. Τη ζητούμενο έπεται από το θεώρημα König-Egernáry. □

Άσκηση 7. Αφού βρείτε την κάτοψη του σπιτιού σας (ή κάποιου άλλου κτηρίου/διαμερίσματος) αποδείξτε αν υπάρχει ή όχι τρόπος να διασχίσει κανείς τις πόρτες του σπιτιού σας ακριβώς μια φορά την κάθε μία. Γίνεται το δωμάτιο αφετηρίας και τερματισμού να είναι το ίδιο;



Σχήμα 1: Η κάτοψη ενός σπιτιού

Απάντηση. Στο Σχήμα 1 βλέπουμε την κάτοψη ενός σπιτιού. Το επαγόμενο γράφημα της κάτοψης, όπου για κορυφές χρησιμοποιούμε τους χώρους του σπιτιού και για ακμές τις πόρτες είναι το εξής:



Πλέον το αρχικό ερώτημα γίνεται κατά πόσο το παραπάνω γράφημα έχει κύκλο ή/και μονοπάτι Euler. Καθώς παρατηρούμε ότι ακριβώς δύο κορυφές του έχουν περιττό βαθμό, το γράφημα έχει μονοπάτι, αλλά όχι κύκλο Euler, δηλαδή μπορούμε να περάσουμε από κάθε πόρτα ακριβώς μια φορά, αλλά δεν θα καταλήξουμε στο δωμάτιο από το οποίο ξεκινήσαμε.

Σύμφωνα με τον τρόπο κατασκευής μονοπατιών και κύκλων Euler που έχουμε δει, ένα τέτοιο μονοπάτι είναι το

$$\text{Έξοδος} \to \text{Ενιαίος} \to \text{Υπνοδωμάτιο} \to \text{Μπαλκόνι} \to \text{Ενιαίος} \to \text{WC}\,.$$

□

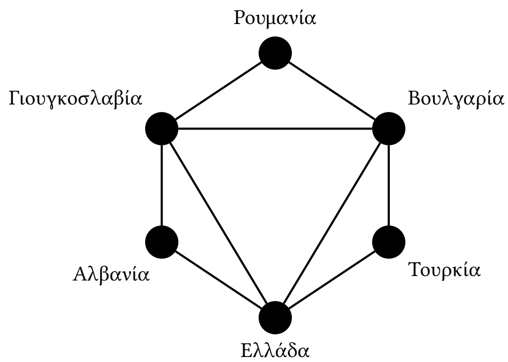
Άσκηση 8. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ που περιέχει κύκλο Hamilton. Δείξτε ότι υπάρχει 2-κανονικό συνεκτικό υπογράφημα $H = (V, E')$ του G, τέτοιο ώστε $|V| = |E'|$.

Απάντηση. Το ζητούμενο γράφημα είναι ακριβώς ο κύκλος Hamilton του γραφήματος! □

Άσκηση 9. Αφού κατασκευάσετε το αντίστοιχο γράφημα, βρείτε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε έναν χάρτη των Βαλκανίων, ώστε δυο χώρες που συνορεύουν να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Σχήμα 2: Η βαλκανική χερσόνησος

Απάντηση. Στο Σχήμα 2 βλέπουμε έναν χάρτη των Βαλκανίων. Από τον χάρτη αυτό κατασκευάζουμε το παρακάτω επαγόμενο γράφημα:



Κατασκευαστικά, βλέπουμε ότι το γράφημα αυτό έχει χρωματικό αριθμό 3 και ένας χρωματισμός του με 3 χρώματα είναι ο εξής: Χρώμα Α (Ρουμανία, Ελλάδα), Χρώμα Β (Γιουγκοσλαβία, Τουρκία), Χρώμα Γ (Βουλγαρία, Αλβανία). □

Άσκηση 10. Έστω $G = (V, E)$ απλό επίπεδο γράφημα με $n = |V|$ και $e = |E|$. Αν το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες, σε πόσες περιοχές διαμερίζει το G το επίπεδο;

Απάντηση. Αναπαριστούμε το γράφημα με μια επίπεδη αναπαράσταση (χωρίς διασταυρώσεις ακμών). Έστω $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος, με $n_i = |V_i|$ και $e_i = |E_i|$ για $i = 1, \ldots, k$. Τότε προφανώς έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \text{ και } \sum_{i=1}^{k} e_i = e.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η πρώτη συνιστώσα, από τον τύπο του Euler θα διαμερίσει το επίπεδο σε

$$r_1 = e_1 - n_1 + 2$$

περιοχές. Εφόσον έχουμε επίπεδη αναπαράσταση, η δεύτερη συνιστώσα, θα διαμερίσει ακριβώς μια από αυτές τις περιοχές σε $e_2 - n_2 + 2$ νέες περιοχές, δηλαδή συνολικά θα έχουμε

$$r_2 = (e_1 - n_1 + 2) - 1 + (e_2 - n_2 + 2) = (e_1 + e_2) - (n_1 + n_2) + 3$$

περιοχές. Επαγωγικά βλέπουμε ότι όταν θα λάβουμε υπόψιν μας την j-στή συνιστώσα, θα έχουμε

$$r_j = \left(\sum_{i=1}^{j} e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{j} n_i\right) + (j+1)$$

περιοχές. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $j = k$ παίρνουμε ότι συνολικά το G διαμερίζει το επίπεδο σε

$$r = r_k = e - n + (k+1)$$

περιοχές. □