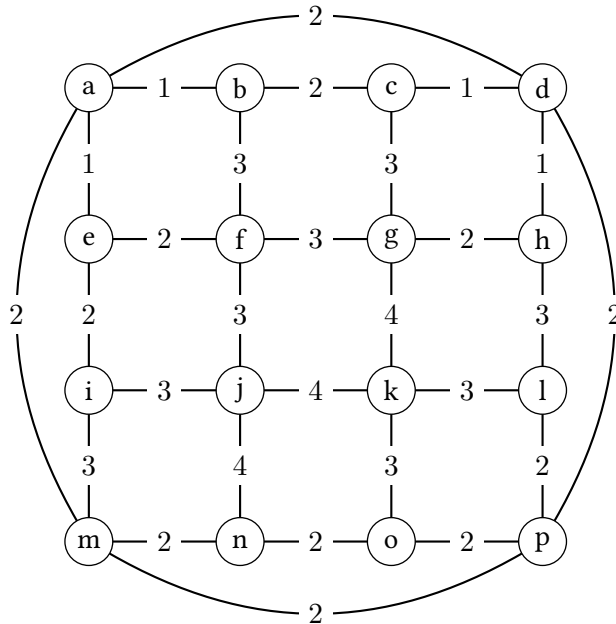


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
 ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
 ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - MEM241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
 ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

4ο σετ ασκήσεων (Διμερή γραφήματα και ταιριάσματα)

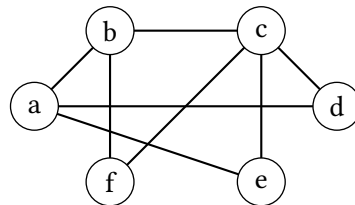
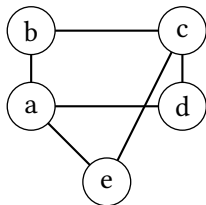
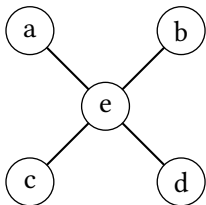
Άσκηση 1. Δείξτε ότι αν στο γράφημα G υπάρχουν s κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε $\chi(G) \leq n - s + 1$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος

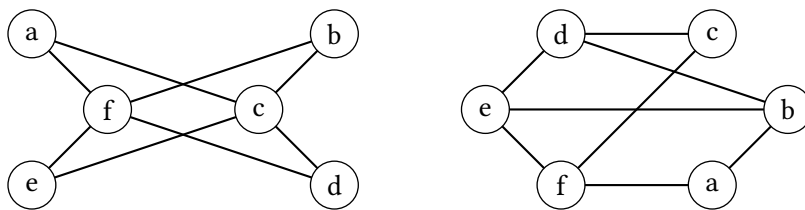
Άσκηση 2. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Dijkstra για να βρείτε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την κορυφή a στην κορυφή k και από την κορυφή e στην κορυφή l στο παρακάτω γράφημα:



Άσκηση 3. Δείξτε ότι ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους.

Άσκηση 4. Βρείτε τον χρωματικό αριθμό των παρακάτω γραφημάτων και εξετάστε αν είναι διμερή.





Άσκηση 5. Μια εταιρεία έχει 5 εργαζόμενους: Ζηνοβία, Αχιλλέας, Σταμάτης, Τάσος και Μαρία. Κάθε εργαζόμενος θα αναλάβει ένα από τα παρακάτω πόστα: Σχεδιασμός, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις, Μάρκετινγκ, Ανάπτυξη, Βιομηχανικός σχεδιασμός.

Η Ζηνοβία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Αχιλλέας μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό ή Ανάπτυξη. Ο Σταμάτης μπορεί να αναλάβει Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Τάσος μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Τέλος, η Μαρία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό.

- i. Μοντελοποιήστε τις ικανότητες των εργαζομένων σε ένα διμερές γράφημα.
- ii. Δώστε σε κάθε εργαζόμενο ένα πόστο που μπορεί να αναλάβει.

Άσκηση 6. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας, του οποίου οι εγγραφές βρίσκονται στο σύνολο $\{0, 1\}$. Ονομάζουμε *ευθεία* του πίνακα μια γραμμή ή μια στήλη του. Δείξτε ότι το ελάχιστο πλήθος ευθειών που περιέχει όλα τα 1 του πίνακα είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος των 1 που δεν βρίσκονται ανά δύο στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 7. Αφού βρείτε την κάτοψη του σπιτιού σας (ή κάποιου άλλου κτηρίου/διαμερίσματος) αποδείξτε αν υπάρχει ή όχι τρόπος να διασχίσει κανείς τις πόρτες του σπιτιού σας ακριβώς μια φορά την κάθε μία. Γίνεται το δωμάτιο αφετηρίας και τερματισμού να είναι το ίδιο;

Άσκηση 8. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ που περιέχει κύκλο Hamilton. Δείξτε ότι υπάρχει 2-κανονικό συνεκτικό υπογράφημα $H = (V, E')$ του G , τέτοιο ώστε $|V| = |E'|$.

Άσκηση 9. Αφού κατασκευάσετε το αντίστοιχο γράφημα, βρείτε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε έναν χάρτη των Βαλκανίων, ώστε δυο χώρες που συνορεύουν να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Άσκηση 10. Έστω $G = (V, E)$ απλό επίπεδο γράφημα με $n = |V|$ και $e = |E|$. Αν το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες, σε πόσες περιοχές διαμερίζεται το G το επίπεδο;