ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΕΜ241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

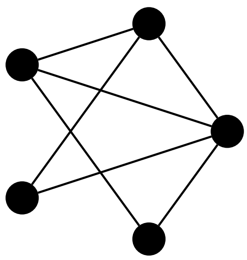
3ο σετ ασκήσεων (Εισαγωγή στην θεωρία γραφημάτων)

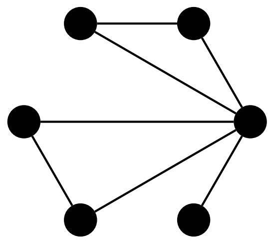
Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις του Κεφαλαίου 5.

Άσκηση 1. Η *ακολουθία βαθμών* ενός γραφήματος είναι η ακολουθία των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος γραμμένοι κατά φθίνουσα σειρά. Βρείτε το πλήθος των ακμών και σχεδιάστε ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών την

i. 4, 3, 3, 2, 2 και την
ii. 5, 2, 2, 2, 2, 1.

Απάντηση. Μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα αυτά ως εξής:





Από το θεώρημα των χειραψιών, έχουμε ότι και τα δύο γραφήματα θα έχουν 7 ακμές (ανεξάρτητα από το αν είναι ισόμορφα με τα παραπάνω ή όχι). □

Άσκηση 2. Ένα σύνολο κορυφών ενός γραφήματος $G = (V, E)$ λέγεται *ανεξάρτητο* αν κάθε δύο κορυφές το δεν συνδέονται με ακμή. Ένα σύνολο κορυφών λέγεται *κάλυμμα* αν κάθε ακμή του γραφήματος περιέχει κάποια από τις κορυφές αυτές. Δείξτε ότι $A \subseteq V$ ανεξάρτητο αν και μόνο αν $V \setminus A$ κάλυμμα.

Απάντηση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \text{ ανεξάρτητο} &\iff \forall\, u, v \in A \;:\; \{u, v\} \notin E \\ &\iff \forall\, \{u, v\} \in E \;:\; \{u, v\} \nsubseteq A \\ &\iff \forall\, \{u, v\} \in E \;:\; u \notin A \text{ ή } v \notin A \\ &\iff V \setminus A \text{ κάλυμμα.} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα. Το *συμπλήρωμα* του G είναι το γράφημα $G^C = (V, E^C)$, τέτοιο ώστε $E \cap E^C = \emptyset$ και

$$E \cup E^C = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}.$$

Δείξτε ότι αν το G είναι ισόμορφο με το G^C, τότε $|V| \equiv 0, 1 \pmod 4$. Επίσης βρείτε ένα γράφημα 5 κορυφών που είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.

Απάντηση. Έστω G ισόμορφο με το G^C. Τότε πρέπει $|E| = |E^C|$. Ακόμα έχουμε

$$|E| + |E^C| = |\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}| = |V|(|V| - 1)/2,$$

δηλαδή συνολικά

$$|E| = \frac{|V|(|V| - 1)}{4}.$$

Επειδή $|E| \in \mathbb{Z}$, αυτό σημαίνει ότι $4 \mid |V|(|V| - 1)$ και επειδή $\gcd(|V|, |V| - 1) = 1$, καταλήγουμε ότι $4 \mid |V|$ ή $4 \mid (|V| - 1)$. Το ζητούμενο έπεται.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο κύκλος C_5 είναι ισόμορφος με το C_5^C. $\square$

Άσκηση 4. Μια ακολουθία λέγεται *γραφηματική*, αν είναι η ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος. Βρείτε κατά πόσο οι παρακάτω ακολουθίες είναι γραφηματικές. Αν ναι, σχεδιάστε ένα αντίστοιχο γράφημα.

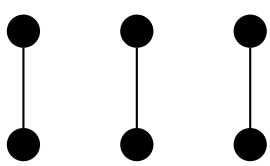
i. 5, 4, 3, 2, 1, 0
ii. 2, 2, 2, 2, 2, 2
iii. 3, 3, 3, 2, 2, 2
iv. 1, 1, 1, 1, 1, 1
v. 5, 3, 3, 3, 3, 3
vi. 3, 3, 3, 3, 2
vii. 4, 4, 3, 2, 1
viii. 3, 2, 2, 1, 0
ix. 1, 1, 1, 1, 1

Απάντηση. i. Παρατηρούμε ότι έχουμε περιττό πλήθος κορυφών περιττού βαθμού, άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα και η ακολουθία δεν είναι γραφηματική.

ii. Το ζητούμενο γράφημα υπάρχει, π.χ. το C_6. Άρα η ακολουθία είναι γραφηματική.

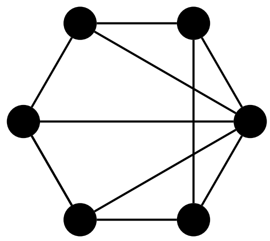
iii. Παρατηρούμε ότι έχουμε περιττό πλήθος κορυφών περιττού βαθμού, άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα και η ακολουθία δεν είναι γραφηματική.

iv. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής



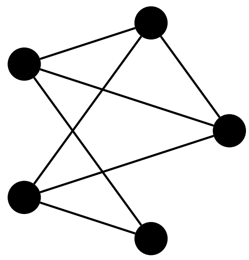
άρα η ακολουθία είναι γραφηματική.

v. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής



άρα η ακολουθία είναι γραφηματική.

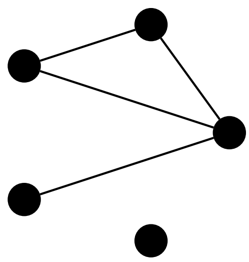
vi. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής



άρα η ακολουθία είναι γραφηματική.

vii. Ένα γράφημα με αυτούς τους βαθμούς κορυφών θα έχει 5 κορυφές. Δυο εξ' αυτών θα έχουν βαθμό 4, δηλαδή θα ενώνονται με όλες τις άλλες κορυφές, επομένως όλες οι κορυφές θα έχουν τουλάχιστον 2 γείτονες, δηλαδή βαθμό τουλάχιστον 2. Άρα δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή βαθμού 1. Καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει γράφημα με αυτούς τους βαθμούς κορυφών και η ακολουθία δεν είναι γραφηματική.

viii. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής



άρα η ακολουθία είναι γραφηματική.

ix. Παρατηρούμε ότι έχουμε περιττό πλήθος κορυφών περιττού βαθμού, άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα και η ακολουθία δεν είναι γραφηματική. □

Άσκηση 5. Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_n$ γραφηματική ακολουθία, όπου $d_i \geq d_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$. Δείξτε ότι υπάρχει απλό γράφημα με κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ τέτοιο ώστε $\deg(v_i) = d_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και v_1 γειτονική με τις $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε κατασκευαστικά.

Απάντηση. Εφόσον η ακολουθία είναι γραφηματική υπάρχει κάποιο απλό γράφημα $G = (V, E)$ με κορυφές τις $v_1, \ldots, v_n$. Μάλιστα χβγ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\deg v_i = d_i$. Αν $d_1 = 0$, τότε η ισχύς της πρότασης είναι προφανής. Επομένως υποθέτουμε στο εξής ότι $d_1 > 0$.

Εάν η v_1 γειτονεύει με τις κορυφές $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$, τότε έχουμε τελειώσει, οπότε επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση που δεν ισχύει αυτό.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει μια κορυφή $w \in \{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$ που δεν γειτονεύει με την v_1. Τότε, υποχρεωτικά, θα υπάρχει κάποια $x \in \{v_{d_1} + 2, \ldots, v_n\}$ που θα γειτονεύει με την v_1. Ακόμα, από υπόθεση, θα έχουμε ότι $\deg w \geq \deg x$.

Άρα θα υπάρχει μια ακμή του w που δεν θα είναι ακμή του x, έστω $\{y, w\}$. Με άλλα λόγια έχουμε ότι $\{y, w\}, \{x, v_1\} \in E$, ενώ $\{x, y\}, \{w, v_1\} \notin E$.

Τώρα από το G διαγράφουμε τις ακμές $\{y, w\}, \{x, v_1\}$ και προσθέτουμε τις ακμές $\{x, y\}, \{w, v_1\}$ και ονομάζουμε G' το γράφημα που προκύπτει.

Εύκολα βλέπουμε ότι οι κορυφές διατήρησαν τους βαθμούς τους, αλλά πλέον η w γειτονεύει με την v_1. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για όλες τις κορυφές εντός του συνόλου $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$ δεν γειτονεύουν με την v_1 θα καταλήξουμε σε ένα γράφημα με τις επιθυμητές ιδιότητες. □

Άσκηση 6. Έστω η ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ τέτοια ώστε $0 \leq d_{i+1} \leq d_i$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$, ενδεχομένως μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων ώστε να είναι φθίνουσα, είναι γραφηματική.

Απάντηση. Έστω η γραφηματική ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$, με $0 \leq d_{i+1} \leq d_i$. Από την προηγούμενη άσκηση, υπάρχει γράφημα με κορυφές βαθμών $\deg v_i = d_i$ για $i = 1, \ldots, n$ τέτοιο ώστε η v_1 να γειτονεύει με τις $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$. Αφαιρούμε από το γράφημα την κορυφή v_1 και όλες τις ακμές της. Εύκολα βλέπουμε ότι το γράφημα που προκύπτει θα έχει ακολουθία βαθμών $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$, άρα αυτή θα είναι γραφηματική.

Αντίστροφα, αν η ακολουθία $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ είναι γραφηματική, τότε υπάρχει γράφημα G με τους παραπάνω βαθμούς κορυφών. Αν προσθέσουμε στο γράφημα αυτό μια επιπλέον κορυφή και την συνδέσουμε με τις d_1 πρώτες κορυφές του G, τότε θα προκύψει ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών $d_1, d_2, \ldots, d_n$ και το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 6, ώστε να φτιάξετε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που να ελέγχει κατά πόσο μια ακολουθία είναι γραφηματική ή όχι.

Απάντηση. Ένας αλγόριθμος, που προκύπτει άμεσα από την Άσκηση 6, και ελέγχει κατά πόσο η ακολουθία $d_1, \ldots, d_n$ είναι γραφηματική ή όχι, είναι ο εξής:

i. Γράψε την ακολουθία σε φθίνουσα σειρά (από το μεγαλύτερο στο μικρότερο).

ii. Αν $d_n < 0$ επέστρεψε ΨΕΥΔΕΣ.

iii. Αν $d_1 = 0$ επέστρεψε ΑΛΗΘΕΣ.

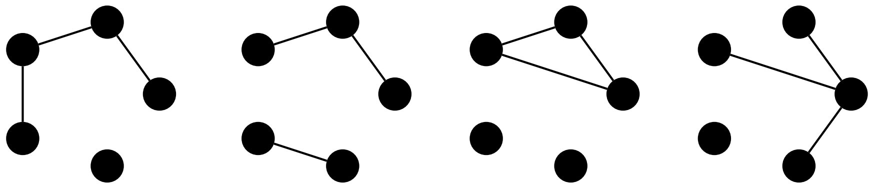
iv. Πάρε την ακολουθία $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, \ldots, d_n$ και επανέλαβε την διαδικασία.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε την ορθότητα του αλγόριθμου βάσει της Άσκησης 6. Για εξάσκηση, ελέγξτε κατά πόσο οι ακολουθίες που δόθηκαν σε προηγούμενες ασκήσεις είναι γραφηματικές με την βοήθεια αυτού του αλγόριθμου. □

Άσκηση 8. Πόσα μη ισόμορφα απλά γραφήματα υπάρχουν

i. με 5 κορυφές και 3 ακμές και
ii. με 6 κορυφές και 4 ακμές;

Απάντηση. Κατασκευαστικά, ελέγχουμε ότι όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα με 5 κορυφές και 3 ακμές είναι τα εξής:



Ομοίως μπορούμε να εργαστούμε και για την περίπτωση των 6 κορυφών και 4 ακμών. □

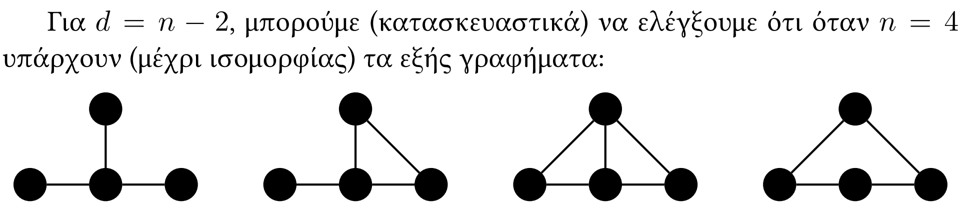
Άσκηση 9. Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα n κορυφών έχει τουλάχιστον $n-1$ ακμές.

Απάντηση. Ένα συνεκτικό γράφημα n κορυφών έχει ως υπογράφημα ένα παράγων δέντρο, το οποίο θα περιέχει $n-1$ ακμές. □

Άσκηση 10. Βρείτε όλα τα (ισόμορφα) γραφήματα διάμετρου $d = n-2$ και $d = 1$ για $n = 4$ και $n = 6$.

Απάντηση. Για $d = 1$, προφανώς υπάρχει ένα (μέχρις ισομορφίας) γράφημα για κάθε n, το K_n.

Για $d = n-2$, μπορούμε (κατασκευαστικά) να ελέγξουμε ότι όταν $n = 4$ υπάρχουν (μέχρι ισομορφίας) τα εξής γραφήματα:



Ομοίως μπορούμε να εργαστούμε και για την περίπτωση των 6 κορυφών. □

Άσκηση 11. Δείξτε ότι κάθε κύκλωμα στο $K_{m,n}$ έχει άρτιο μήκος.

Απάντηση. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι αν το $K_{m,n}$ έχει κύκλωμα περιττού μήκους, τότε θα έχει και κάποιον κύκλο περιττού μήκους. Αυτό σημαίνει ότι ο χρωματικός του αριθμός θα είναι τουλάχιστον 3. Όμως το $K_{m,n}$, ως διμερές έχει χρωματικό αριθμό το πολύ 2, άτοπο. □

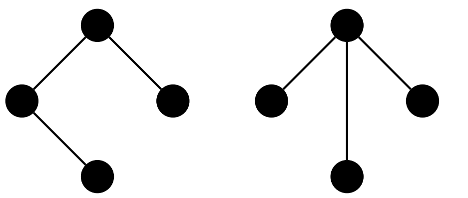
Άσκηση 12. Κατασκευάστε ένα κατάλληλο γράφημα ώστε να λύσετε το *πρόβλημα των ζηλιάρηδων συζύγων*: Δύο ετερόφυλα ζευγάρια βρίσκονται στην μια όχθη ενός ποταμού και προκειμένου να περάσουν απέναντι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μια βάρκα που μεταφέρει μέχρι δύο άτομα, η οποία δεν μπορεί να περάσει απέναντι μόνη της. Οι άντρες των ζευγαριών είναι ζηλιάρηδες και δεν επιτρέπουν στην σύζηγό τους να βρίσκεται σε μια όχθη με τον άλλο άντρα χωρίς την παρουσία τους. Βρείτε τρόπο ώστε να περάσουν οι άνθρωποι αυτοί στην απέναντι όχθη.

Απάντηση. Δείτε το βίντεο για την λύση! □

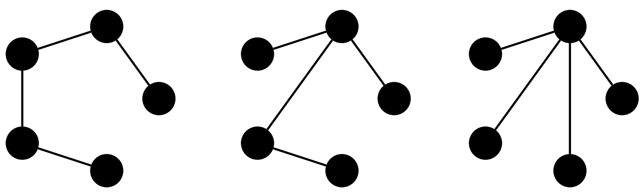
Άσκηση 13. Πόσα μη ισόμορφα δέντρα υπάρχουν

i. με 4 κορυφές και
ii. με 5 κορυφές;

Απάντηση. Η ερώτηση είναι ισοδύναμη με την εξής: Βρείτε όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα n κορυφών, $n-1$ ακμών, τα οποία να είναι συνεκτικά; Εύκολα βλέπουμε κατασκευαστικά ότι για την περίπτωση $n=4$, τα γραφήματα αυτά είναι τα εξής:



Ομοίως εργαζόμαστε και για την περίπτωση $n=5$ και έχουμε τα εξής:

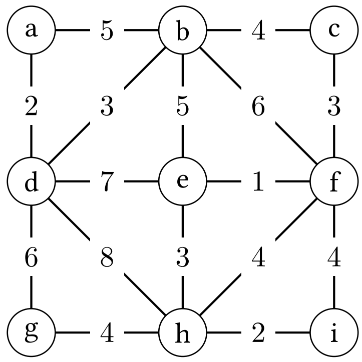


□

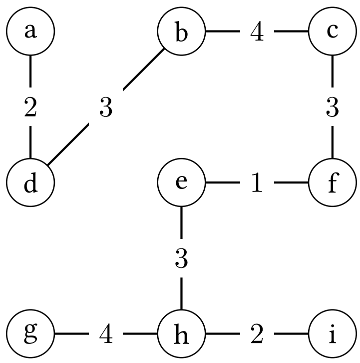
Άσκηση 14. Έστω G απλό συνεκτικό γράφημα. Δείξτε ότι το G είναι δέντρο αν και μόνο αν δεν υπάρχουν δύο μονοπάτια P_1 και P_2 με κοινή αρχή και τέλος, τα οποία δεν έχουν καμία κοινή ακμή.

Απάντηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ύπαρξη τέτοιων μονοπατιών είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη κύκλου. □

Άσκηση 15. Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.



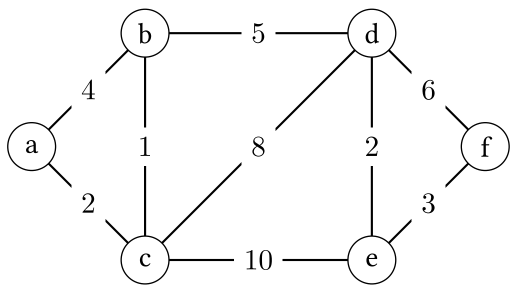
Απάντηση.
Τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά βαρών τις ακμές του γραφήματος, όπως φαίνεται στην διπλανή λίστα. Ακολουθόντας τα βήματα του αλγόριθμου, επιλέγουμε με την σειρά τις εξής ακμές: ef, ad, hi bd, cf, ch, bc και gh και παραλείπουμε τις fh και fi, καθως και όλες αυτές που εμφανίζονται από την ab και μετά.
Καταλήγουμε ότι ένα παράγων δέντρο είναι το εξής:



i. ef (1)
ii. ad (2)
iii. hi (2)
iv. bd (3)
v. cf (3)
vi. eh (3)
vii. bc (4)
viii. fh (4)
ix. fi (4)
x. gh (4)
xi. ab (5)
xii. be (5)
xiii. bf (6)
xiv. dg (6)
xv. de (7)
xvi. dh (8)

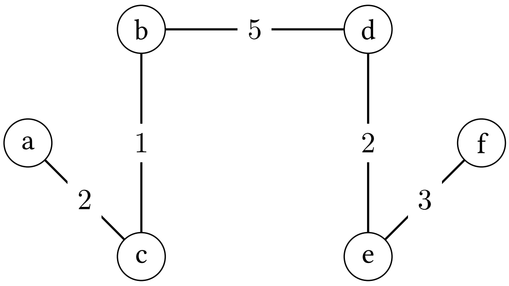
□

Άσκηση 16. Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.



Απάντηση.

Τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά βαρών τις ακμές του γραφήματος, όπως φαίνεται στην διπλανή λίστα. Ακολουθόντας τα βήματα του αλγόριθμου, επιλέγουμε με την σειρά τις εξής ακμές: bc, ac, de, ef και bd και παραλείπουμε την ab, καθως και όλες αυτές που εμφανίζονται από την df και μετά.
Καταλήγουμε ότι ένα παράγων δέντρο είναι το εξής:



i. bc (1)
ii. ac (2)
iii. de (2)
iv. ef (3)
v. ab (4)
vi. bd (5)
vii. df (6)
viii. cd (8)
ix. ce (10)

□