

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - MEM241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

3ο σετ ασκήσεων (Εισαγωγή στην θεωρία γραφημάτων)

Από το Μ. Κολουτζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις του Κεφαλαίου 5.

**Άσκηση 1.** Η ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος είναι η ακολουθία των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος γραμμένοι κατά φθίνουσα σειρά. Βρείτε το πλήθος των ακμών και σχεδιάστε ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών την

- i. 4, 3, 3, 2, 2 και την
- ii. 5, 2, 2, 2, 2, 1.

**Άσκηση 2.** Ένα σύνολο κορυφών ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  λέγεται *ανεξάρτητο* αν κάθε δύο κορυφές το δεν συνδέονται με ακμή. Ένα σύνολο κορυφών λέγεται *κάλυμμα* αν κάθε ακμή του γραφήματος περιέχει κάποια από τις κορυφές αυτές. Δείξτε ότι  $A \subseteq V$  ανεξάρτητο αν και μόνο αν  $V \setminus A$  κάλυμμα.

**Άσκηση 3.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα απλό γράφημα. Το *συμπλήρωμα* του  $G$  είναι το γράφημα  $G^C = (V, E^C)$ , τέτοιο ώστε  $E \cap E^C = \emptyset$  και

$$E \cup E^C = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}.$$

Δείξτε ότι αν το  $G$  είναι ισόμορφο με το  $G^C$ , τότε  $|V| \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Επίσης βρείτε ένα γράφημα 5 κορυφών που είναι ισόμορφο με το συμπλήρωμά του.

**Άσκηση 4.** Μια ακολουθία λέγεται *γραφηματική*, αν είναι η ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος. Βρείτε κατά πόσο οι παρακάτω ακολουθίες είναι γραφηματικές. Αν ναι, σχεδιάστε ένα αντίστοιχο γράφημα.

- i. 5, 4, 3, 2, 1, 0
- ii. 2, 2, 2, 2, 2, 2
- iii. 3, 3, 3, 2, 2, 2
- iv. 1, 1, 1, 1, 1, 1
- v. 5, 3, 3, 3, 3, 3
- vi. 3, 3, 3, 3, 2
- vii. 4, 4, 3, 2, 1
- viii. 3, 2, 2, 1, 0
- ix. 1, 1, 1, 1, 1

**Άσκηση 5.** Έστω  $d_1, d_2, \dots, d_n$  γραφηματική ακολουθία, όπου  $d_i \geq d_{i+1}$  για κάθε  $i = 1, \dots, n-1$ . Δείξτε ότι υπάρχει απλό γράφημα με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_n$  τέτοιο ώστε  $\deg(v_i) = d_i$  για  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $v_1$  γειτονική με τις  $v_2, \dots, v_{d_1+1}$ .

*Υπόδειξη:* Σκεφτείτε κατασκευαστικά.

**Άσκηση 6.** Έστω η ακολουθία  $d_1, d_2, \dots, d_n$  τέτοια ώστε  $0 \leq d_{i+1} \leq d_i$ . Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ , ενδεχομένως μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων ώστε να είναι φθίνουσα, είναι γραφηματική.

**Άσκηση 7.** Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6, ώστε να φτιάξετε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που να ελέγχει κατά πόσο μια ακολουθία είναι γραφηματική ή όχι.

**Άσκηση 8.** Πόσα μη ισόμορφα απλά γραφήματα υπάρχουν

- i. με 5 κορυφές και 3 ακμές και
- ii. με 6 κορυφές και 4 ακμές;

**Άσκηση 9.** Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα  $n$  κορυφών έχει τουλάχιστον  $n - 1$  ακμές.

**Άσκηση 10.** Βρείτε όλα τα (ισόμορφα) γραφήματα διάμετρου  $d = n - 2$  και  $d = 1$  για  $n = 4$  και  $n = 6$ .

**Άσκηση 11.** Δείξτε ότι κάθε κύκλωμα στο  $K_{m,n}$  έχει άρτιο μήκος.

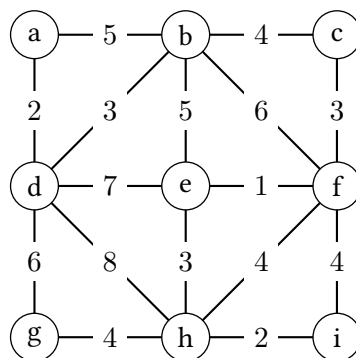
**Άσκηση 12.** Κατασκευάστε ένα κατάλληλο γράφημα ώστε να λύσετε το πρόβλημα των ζηλιάρηδων συζύγων: Δύο ετερόφυλα ζευγάρια βρίσκονται στην μια όχθη ενός ποταμού και προκειμένου να περάσουν απέναντι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μια βάρκα που μεταφέρει μέχρι δύο άτομα, η οποία δεν μπορεί να περάσει απέναντι μόνη της. Οι άντρες των ζευγαριών είναι ζηλιάρηδες και δεν επιτρέπουν στην σύζυγό τους να βρίσκεται σε μια όχθη με τον άλλο άντρα χωρίς την παρουσία τους. Βρείτε τρόπο ώστε να περάσουν οι άνθρωποι αυτοί στην απέναντι όχθη.

**Άσκηση 13.** Πόσα μη ισόμορφα δέντρα υπάρχουν

- i. με 4 κορυφές και
- ii. με 5 κορυφές;

**Άσκηση 14.** Έστω  $G$  απλό συνεκτικό γράφημα. Δείξτε ότι το  $G$  είναι δέντρο αν και μόνο αν δεν υπάρχουν δύο μονοπάτια  $P_1$  και  $P_2$  με κοινή αρχή και τέλος, τα οποία δεν έχουν καμία κοινή ακμή.

**Άσκηση 15.** Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.



**Άσκηση 16.** Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.

