ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΕΜ241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

2ο σετ ασκήσεων (Προχωρημένη απαρίθμηση)

Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις του Κεφαλαίου 4.

Άσκηση 1. Γράψτε σε κλειστή μορφή τα παρακάτω αθροίσματα:

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$.

ii. $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} x^j$.

iii. $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{2^i}$.

iv. $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{2r}$.

v. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} 3^k$.

Απάντηση. i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k 1^{n-k} = (5+1)^n = 6^n$.

ii. $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} x^j = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-x)^j 1^{2n-j} = (1-x)^{2n}$.

iii. $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(-\frac{1}{2}\right)^i 1^{m-i} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}$.

iv. $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{2r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x^2)^r 1^{n-r} = (1+x^2)^n$.

v. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\binom{m}{k} k = \frac{m!}{k!(m-k)!} k = m \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)} = m \binom{m-1}{k-1}. \qquad (1)$$

Τώρα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k}3^k \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}m3^k = 3m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}3^k1^{(m-1)-k}$$
$$= 3m(3+1)^{m-1} = 3\cdot 4^{m-1}m. \quad \square$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

i. $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

ii. $2^{n-1} = \frac{1}{n}\left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}\right]$.

iii. $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(-1)^k = 0$.

Απάντηση. Έχουμε ότι:

i. $n(1+x)^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

ii. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} \overset{(1)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$.

iii. $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(-1)^k \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-1)^k = -n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k$
$= -n(1-1)^{n-1} = 0.$ $\square$

Άσκηση 3. Πόσοι ακέραιοι από το 1 ως το 99.999 έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 9;

Απάντηση. Θεωρούμε ότι η γραφή του αριθμού (στο δεκαδικό σύστημα) είναι $y_4y_3y_2y_1y_0$. Ψάχνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$, με $0 \le y_i \le 9$ για $i = 0, \ldots, 4$. Επομένως η απάντηση είναι

$$P(9,5) = \binom{13}{9} = 715. \quad \square$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε συνδυαστικά ότι

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Υπόδειξη: Γράψτε το δεξί μέρος ως $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$ και δείξτε ότι και τα δυο μέρη μετρούν τους τρόπους επιλογής ενός υποσυνόλου κάποιου συνόλου μεγέθους n και δύο όχι απαραίτητα διαφορετικών στοιχείων του υποσυνόλου.

Απάντηση. Θεωρούμε το σύνολο $[n]$. Επιλέγουμε ένα σύνολο $A \subseteq [n]$ και δύο στοιχεία $x, y \in A$ (όχι απαραίτητα διαφορετικά). Θα μετρήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κάνουμε αυτήν την επιλογή με δύο τρόπους:

Ας υποθέσουμε ότι το A έχει τάξη k. Παρατηρούμε ότι $0 \leq k \leq n$. Μπορούμε να επιλέξουμε το A με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Κάθε ένα από τα $x, y \in A$ μπορούμε να τα επιλέξουμε με k τρόπους, άρα συνολικά με k^2 τρόπους. Καταλήγουμε ότι την συνολική επιλογή μπορούμε να την κάνουμε με

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

τρόπους.

Τώρα ας διαλέξουμε πρώτα τα στοιχεία x και y. Θα πάρουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα, αν $x \neq y$, τότε έχουμε n τρόπους να διαλέξουμε το x και $n-1$ για το y και έχουμε 2^{n-2} τρόπους για να διαλέξουμε κάποιο $A \subset [n]$ που περιέχει τα x, y (γιατί ουσιαστικά αρκεί να διαλέξουμε ένα υποσύνολο του $A \setminus \{x, y\}$ και να του προσθέσουμε τα x, y). Ομοίως, αν $x = y$, έχουμε n τρόπους να επιλέξουμε το x και 2^{n-1} τρόπους να επιλέξουμε το A. Συνολικά θα έχουμε

$$n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

τρόπους.

Το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 5. Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η ανίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11, \quad x_i \geq 0;$$

Υπόδειξη: Εισάγετε μια τέταρτη μεταβλητή x_4.

Απάντηση. 1ος τρόπος: Θέτουμε $x_4 = 11 - (x_1 + x_2 + x_3)$. Τότε $x_4 \geq 0$ και

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11,$$

όπου $x_i \geq 0$. Το τελευταίο γνωρίζουμε ότι έχει

$$P(11, 4) = \binom{14}{11} = 364$$

λύσεις.

2ος τρόπος: Ας ονομάσουμε $x_1 = x$ και $x_2 = y$. Τότε καθώς το x_3 παίρνει τιμές από 0 έως 11, αν θέσω $\lambda = 11 - x_3$, τότε $0 \leq \lambda \leq 11$ και παίρνουμε ότι, αρκεί (για δεδομένο λ να μετρήσουμε τους τρόπους επιλογής των x, y έτσι ώστε

$$x + y \leq \lambda, \ x, y \geq 0.$$

Σχηματικά, αυτό είναι ισοδύναμο με την απαρίθμηση των σημείων του $\mathbb{R}^2$ με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται εντός του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία

$(0,0)$, $(0,\lambda)$ και $(\lambda,0)$. Για κάθε $0 \leq i \leq \lambda$ η γραμμή $x = i$ περιέχει $\lambda - i + 1$ τέτοια σημεία, δηλαδή συνολικά έχουμε $1+2+\cdots+(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda+2)/2$ τέτοια σημεία. Καταλήγουμε ότι η απάντησή μας είναι

$$\sum_{\lambda=0}^{11} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} = \sum_{\lambda=1}^{12} \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} = 364.$$

Σημείωση: Ευχαριστούμε τον Λευτέρη για την ιδέα του 2ου τρόπου! □

Άσκηση 6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 μπάλες σε 7 κουτιά, αν κάθε κουτί μπορεί να περιέχει το πολύ μια μπάλα και αν

i. τα κουτιά και οι μπάλες είναι αριθμημένες;
ii. οι μπάλες είναι αριθμημένες, αλλά τα κουτιά όχι;
iii. οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες, αλλά είναι τα κουτιά;
iv. τα κουτιά και οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες;

Απάντηση. i. Η πρώτη μπάλα έχει 7 επιλογές, η δεύτερη 6 κ.ο.κ.. Συνολικά θα έχουμε $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

ii. Κάθε μπάλα θα μπει μόνη της σε ένα από τα (ίδια μεταξύ τους) κουτιά. Άρα έχουμε έναν τρόπο.

iii. Ουσιαστικά από τα 7 (διαφορετικά) κουτιά θα πρέπει να επιλέξουμε 5 για να δεχθούν κάποια μπάλα. Άρα έχουμε $\binom{7}{5}$ τρόπους.

iv. Σε κάθε περίπτωση, στο τέλος θα πάρουμε 5 γεμάτα και 2 άδεια κουτιά. Άρα έχουμε έναν μοναδικό τρόπο. □

Άσκηση 7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 μπάλες σε 3 κουτιά, αν κάθε κουτί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια μπάλα και αν

i. τα κουτιά και οι μπάλες είναι αριθμημένες;
ii. οι μπάλες είναι αριθμημένες, αλλά τα κουτιά όχι;
iii. οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες, αλλά είναι τα κουτιά;
iv. τα κουτιά και οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες;

Απάντηση. i. Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των επί συναρτήσεων από το σύνολο των μπαλών στο σύνολο των κουτιών. Με άλλα λόγια ψάχνουμε το σύνολο των επί συναρτήσεων $f : [5] \to [3]$. Άρα έχουμε

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^5 = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 = 150$$

τρόπους.

ii. Κάθε δυνατή επιλογή μας σε αυτήν την περίπτωση αντιστοιχεί σε 3! επιλογές της προηγουμένης (όσες οι μεταθέσεις των τριών κουτιών). Καταλήγουμε ότι η απάντηση είναι

$$\frac{150}{3!} = \frac{150}{6} = 25.$$

iii. Εδώ ψάχνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_i \geq 1$ ($i = 1, 2, 3$). Αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x_1' + x_2' + x_3' = 2$, όπου $x_i' = x_i - 1 \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Η τελευταία έχει

$$P(2, 3) = \binom{4}{2} = 6$$

τρόπους να λυθεί.

iv. Εδώ έχουμε μόλις δύο τρόπους για να μοιράσουμε τις επιπλέον 2 μπάλες, και οι δύο να μπουν στο ίδιο κουτί ή να μπουν η κάθε μια σε διαφορετικό. $\square$

Άσκηση 8. Βρείτε κλειστό τύπο για τις ακολουθίες που ορίζουν οι παρακάτω γεννήτριες συναρτήσεις:

i. $(3x - 4)^3$.
ii. $1/(1 - 5x)$.
iii. $(x^3 + 1)^3$.
iv. $x^3/(1 + 3x)$.
v. $x^2 + 3x + 7 + 1/(1 - x^2)$.
vi. $2e^{2x}$.
vii. $1/(1 - 2x^2)$.

Απάντηση. i. $(3x - 4)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (3x)^i (-4)^{3-i}$. Άρα η ακολουθία είναι η $\alpha_i = \binom{3}{i}(-4)^{3-i}3^i$.

ii. $\dfrac{1}{1 - 5x} = \sum_{i=0}^{\infty} (5x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} 5^i x^i$. Άρα $\alpha_i = 5^i$.

iii. $(x^3 + 1)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} x^{3i}$. Άρα $\alpha_0 = \binom{3}{0} = 1$, $\alpha_3 = \binom{3}{1} = 3$, $\alpha_6 = \binom{3}{2} = 3$, $\alpha_9 = \binom{3}{3} = 1$ και $\alpha_i = 0$ για $i \neq 0, 3, 6, 9$.

iv. $\dfrac{x^3}{1 + 3x} = x^3 \sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i = \sum_{i=3}^{\infty} 3^{i-3} x^i$. Άρα $\alpha_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq i \leq 2, \\ 3^{i-3}, & i \geq 3. \end{cases}$

v. $x^2+3x+7+\dfrac{1}{1-x^2} = x^2+3x+7+\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$. Άρα $\alpha_0 = 8$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, και $\alpha_i = \begin{cases} 1, & i \text{ άρτιος} \neq 0,2, \\ 0, & i \text{ περιττός} \neq 1. \end{cases}$

vi. $2e^{2x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^{k+1}}{k!} x^k$, άρα $\alpha_k = \frac{2^{k+1}}{k!}$.

vii. $\dfrac{1}{1-2x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (2x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^{2i}$. Άρα $\alpha_i = \begin{cases} 0, & i \text{ περιττός}, \\ 2^{i/2}, & i \text{ άρτιος}. \end{cases}$ □

Άσκηση 9. i. Ποιά είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_k\}$, όπου a_k είναι το πλήθος των λύσεων της $x_1+x_2+x_3 = k$ και x_1, x_2, x_3 ακέραιοι με $x_1 \geq 2$, $0 \leq x_2 \leq 3$, και $2 \leq x_3 \leq 5$;

ii. Βρείτε το a_6.

Απάντηση. i. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$G(x) = \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)(1+x+x^2+x^3)(x^2+x^3+x^4+x^5) = \frac{x^4(x^4-1)^2}{(1-x)^3}.$$

ii. Προφανώς (από την πρώτη γραφή της γεννήτριας), $a_6 = 6$.

□

Άσκηση 10. Βρείτε με χρήση γεννητριών συναρτήσεων με πόσους τρόπους μπορούν τέσσερις αστυνομικοί να μοιραστούν 25 ίδια ντόνατ, έτσι ώστε κάθε αστυνομικός να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 7 ντόνατ.

Απάντηση. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι $G(x) = (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^4 = x^{28}+4x^{27}+10x^{26}+20x^{25}+35x^{24}+52x^{23}+68x^{22}+80x^{21}+85x^{20}+80x^{19}+68x^{18}+52x^{17}+35x^{16}+20x^{15}+10x^{14}+4x^{13}+x^{12}$, άρα υπάρχουν 20 τρόποι για να μοιριαστούν οι 4 αστυνομικοί τα 25 ντόνατ. □

Άσκηση 11. Η *ακολουθία Fibonacci* ορίζεται ως εξής: $f_1 = f_2 = 1$ και $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ για $i \leq 3$. Βρείτε κλειστό τύπο για τον i-στο όρο της ακολουθίας.

Απάντηση. Καταρχάς προσαρμόζουμε τον ορισμό ως εξής: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ και $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ για $i \leq 2$. Έστω $G(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση. Από τις αρχικές συνθήκες, παίρνουμε

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i = x + \sum_{i=2}^{\infty} (f_{i-1}+f_{i-2})x^i = x + (x+x^2)G(x).$$

Επομένως

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(x-\phi_1)(x-\phi_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{\phi_1}} - \frac{1}{1-\frac{x}{\phi_2}}\right),$$

όπου $\phi_1 = (1+\sqrt{5})/2$ και $\phi_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Καταλήγουμε ότι

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{\phi_1}\right)^k - \left(\frac{1}{\phi_2}\right)^k \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_1^k - \phi_2^k}{\sqrt{5}} x^k.$$

Τελικά παίρνουμε ότι

$$f_k = \frac{\phi_1^k - \phi_2^k}{\sqrt{5}}.$$

□

Άσκηση 12. Βρείτε κλειστό τύπο για τις παρακάτω ακολουθίες:

i. $a_k = 3a_{k-1} + 2$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$.
ii. $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$.
iii. $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 6$ και $a_1 = 30$.
iv. $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 4$ και $a_1 = 12$.
v. $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = 5$.

Απάντηση. Θα δούμε μόνο τρία ερωτήματα. Τα υπόλοιπα βγαίνουν με την ίδια λογική, απλά η λύση τους είναι πολύ τεχνική και πολύπλοκη. Σε κάθε περίπτωση προτείνεται να τα λύσετε για δική σας εξάσκηση.

i. Έστω $G(x)$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} (3a_{k-1} + 2) x^{k-1} \\ &= 1 + 3xG(x) + \frac{2x}{1-x}. \end{aligned}$$

Άρα

$$G(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-x}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$G(x) = 2\sum_{i=0}^{\infty} (3x)^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2 \cdot 3^i - 1) x^i,$$

δηλαδή $a_i = 2 \cdot 3^i - 1$ για $i \geq 0$.

ii. Έστω $G(x)$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} (3a_{k-1} + 4^{k-1}) x^{k-1} \\ &= 1 + 3xG(x) + \frac{x}{1-4x}. \end{aligned}$$

Άρα

$$(1-3x)G(x) = \frac{1-3x}{1-4x} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{1-4x}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(4x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} 4^i x^i,$$

δηλαδή $a_i = 4^i$ για $i \geq 0$.

iv. Έστω $G(x)$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k = 4 + 12x + \sum_{k=2}^{\infty}(a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k)x^k \\
&= 4 + 12x + x\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} + 2x^2\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} + 4x^2\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2}x^{k-2} \\
&= 4 + 12x + x(-4 + G(x)) + 2x^2G(x) + \frac{4x^2}{1-2x}.
\end{aligned}$$

Από το παραπάνω παίρνουμε ότι

$$(1 - x - 2x^2)G(x) = 4 + 8x + \frac{4x^2}{1-2x} = \frac{4(1-3x^2)}{1-2x}.$$

Από το τελευταίο (επειδή $(1 - x - 2x^2) = (1+x)(1-2x)$), βρίσκουμε την γεννήτρια συνάρτηση

$$G(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x)(1-2x)^2} = \frac{4}{9}\left(-\frac{2}{1+x} + \frac{-19x+11}{(1-2x)^2}\right).$$

Επόμενος στόχος μας είναι να γράψουμε την γεννήτρια συνάρτηση με την βοήθεια αθροίσματος (ως δυναμοσειρά). Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i.$$

Ομοίως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-2x} = \sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i \Rightarrow \left(\frac{1}{1-2x}\right)' &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^i i x^{i-1} \\
\Rightarrow \frac{1}{(1-2x)^2} &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i (i+1) x^i.
\end{aligned}$$

Επομένως, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{4}{9}\left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(-1)^{i+1}x^i + (-19x + 11)\sum_{i=0}^{\infty} 2^i(i+1)x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{4}{9}\left(2(-1)^{i+1} + 11\cdot 2^i(i+1) - 19\cdot 2^{i-1}i\right)\right]x^i.
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι $a_i = \frac{4}{9}\left(2(-1)^{i+1} + 11\cdot 2^i(i+1) - 19\cdot 2^{i-1}i\right)$. $\square$

Άσκηση 13. Πόσοι θετικοί ακέραιοι ≤ 100 είναι είτε τετράγωνα, είτε περιττοί;

Απάντηση. Θέτουμε $A = \{0 < n \leq 100 \ : \ n \text{ περιττός}\}$ και $B = \{0 < n \leq 100 \ : \ n \text{ τετράγωνο}\}$. Τότε προφανώς $|A| = 50$ και $|B| = 10$, ενώ $|A \cap B| = 5$. Έτσι από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού παίρνουμε

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 10 - 5 = 55. \qquad \square$$

Άσκηση 14. Πόσοι θετικοί ακέραιοι ≤ 1000 είναι είτε κύβοι, είτε τετράγωνα;

Απάντηση. Θέτουμε $A = \{0 < n \leq 1000 \ : \ n \text{ κύβος}\}$ και $B = \{0 < n \leq 1000 \ : \ n \text{ τετράγωνο}\}$. Τότε προφανώς $|A| = 10$ και $|B| = 31$, ενώ $|A \cap B| = 3$ (οι 6ες δυνάμεις). Έτσι από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού παίρνουμε

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 31 - 3 = 38. \qquad \square$$

Άσκηση 15. Πόσα στοιχεία περιέχει η ένωση τεσσάρων συνόλων μεγέθους 50, 60, 70 και 80 αντίστοιχα, αν ανά δύο τα σύνολα έχουν 5 κοινά στοιχεία, ανά τρία 1 και κανένα στοιχείο δεν είναι κοινό και στα τέσσερα;

Απάντηση. Έστω A_i, $1 \leq i \leq 4$ τα σύνολα αυτά. Υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικές τομές 2 εξ' αυτών των συνόλων, $\binom{4}{3} = 4$ διαφορετικές τομές 3 εξ' αυτών και 1 τομή και των τεσσάρων. Έτσι, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \left|\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right| \\ &= (50 + 60 + 70 + 80) - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 0 = 234. \qquad \square\end{aligned}$$

Άσκηση 16. Πόσες επί συναρτήσεις υπάρχουν από το [7] στο [5];

Απάντηση. Σύμφωνα με τον αντίστοιχο τύπο, το πλήθος των συναρτήσεων αυτών είναι

$$\sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} (5 - i)^7. \qquad \square$$

Άσκηση 17. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 6 παιχνίδια σε 4 παιδιά, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον ένα παιχνίδι;

Απάντηση. Ουσιαστικά ψάχνουμε το πλήθος των επί συναρτήσεων $[6] \to [4]$. Σύμφωνα με τον αντίστοιχο τύπο, το πλήθος των συναρτήσεων αυτών είναι

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} (4 - i)^6. \qquad \square$$