

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - MEM241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

2ο σετ ασκήσεων (Προχωρημένη απαρίθμηση)

Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις του Κεφαλαίου 4.

Άσκηση 1. Γράψτε σε κλειστή μορφή τα παρακάτω αθροίσματα:

i. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k.$

ii. $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} x^j.$

iii. $\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{2^i}.$

iv. $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{2r}.$

v. $\sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} 3^k.$

Άσκηση 2. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

i. $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$

ii. $2^{n-1} = \frac{1}{n} \left[\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} \right].$

iii. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k (-1)^k = 0.$

Άσκηση 3. Πόσοι ακέραιοι από το 1 ως το 99.999 έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 9;

Άσκηση 4. Αποδείξτε συνδυαστικά ότι

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Υπόδειξη: Γράψτε το δεξί μέρος ως $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$ και δείξτε ότι και τα δυο μέρη μετρούν τους τρόπους επιλογής ενός υποσυνόλου κάποιου συνόλου μεγέθους n και δύο όχι απαραίτητα διαφορετικών στοιχείων του υποσυνόλου.

Άσκηση 5. Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η ανίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11, \quad x_i \geq 0;$$

Υπόδειξη: Εισάγετε μια τέταρτη μεταβλητή x_4 .

Άσκηση 6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 μπάλες σε 7 κουτιά, αν κάθε κουτί μπορεί να περιέχει το πολύ μια μπάλα και αν

- i. τα κουτιά και οι μπάλες είναι αριθμημένες;
- ii. οι μπάλες είναι αριθμημένες, αλλά τα κουτιά όχι;
- iii. οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες, αλλά είναι τα κουτιά;
- iv. τα κουτιά και οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες;

Άσκηση 7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 μπάλες σε 3 κουτιά, αν κάθε κουτί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια μπάλα και αν

- i. τα κουτιά και οι μπάλες είναι αριθμημένες;
- ii. οι μπάλες είναι αριθμημένες, αλλά τα κουτιά όχι;
- iii. οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες, αλλά είναι τα κουτιά;
- iv. τα κουτιά και οι μπάλες δεν είναι αριθμημένες;

Άσκηση 8. Βρείτε κλειστό τύπο για τις ακολουθίες που ορίζουν οι παρακάτω γεννήτριες συναρτήσεις:

- i. $(3x - 4)^3$.
- ii. $1/(1 - 5x)$.
- iii. $(x^3 + 1)^3$.
- iv. $x^3/(1 + 3x)$.
- v. $x^2 + 3x + 7 + 1/(1 - x^2)$.
- vi. $2e^{2x}$.
- vii. $1/(1 - 2x^2)$.

Άσκηση 9. i. Ποιά είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_k\}$, όπου a_k είναι το πλήθος των λύσεων της $x_1 + x_2 + x_3 = k$ και x_1, x_2, x_3 ακέραιοι με $x_1 \geq 2, 0 \leq x_2 \leq 3$, και $2 \leq x_3 \leq 5$;
ii. Βρείτε το a_6 .

Άσκηση 10. Βρείτε με χρήση γεννητριών συναρτήσεων με πόσους τρόπους μπορούν τέσσερις αστυνομικοί να μοιραστούν 25 ίδια ντόνατ, έτσι ώστε κάθε αστυνομικός να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 7 ντόνατ.

Άσκηση 11. Η ακολουθία *Fibonacci* ορίζεται ως εξής: $f_1 = f_2 = 1$ και $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ για $i \geq 3$. Βρείτε κλειστό τύπο για τον i -στο όρο της ακολουθίας.

Άσκηση 12. Βρείτε κλειστό τύπο για τις παρακάτω ακολουθίες:

- i. $a_k = 3a_{k-1} + 2$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$.
- ii. $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$.
- iii. $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 6$ και $a_1 = 30$.
- iv. $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 4$ και $a_1 = 12$.
- v. $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = 5$.

Άσκηση 13. Πόσοι θετικοί ακέραιοι ≤ 100 είναι είτε τετράγωνα, είτε περιττοί;

Άσκηση 14. Πόσοι θετικοί ακέραιοι ≤ 1000 είναι είτε κύβοι, είτε τετράγωνα;

Άσκηση 15. Πόσα στοιχεία περιέχει η ένωση τεσσάρων συνόλων μεγέθους 50, 60, 70 και 80 αντίστοιχα, αν ανά δύο τα σύνολα έχουν 5 κοινά στοιχεία, ανά τρία 1 και κανένα στοιχείο δεν είναι κοινό και στα τέσσερα;

Άσκηση 16. Πόσες επί συναρτήσεις υπάρχουν από το $[7]$ στο $[5]$;

Άσκηση 17. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 6 παιχνίδια σε 4 παιδιά, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον ένα παιχνίδι;