ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΕΜ241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων (Επαγωγή - Βασικές αρχές απαρίθμησης)

Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις της Παραγράφου 1.9, τις ασκήσεις 1.36–1.44 και εκείνες του Κεφαλαίου 3.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Απάντηση. Θα εργαστούμε με επαγωγή. Για $n = 1$, η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για κάποιο n (ΕΥ). Αυτό σημαίνει ότι

$$9 \mid 4^n + 15n - 1 \iff 4^n + 15n - 1 = 9k \iff 4^n = 9k - 15n + 1,$$

για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Τότε για $n + 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 15n + 14 \overset{\text{ΕΥ}}{=} 4(9k - 15n + 1) + 15n + 14 \\ &= 36k - 45n + 18 = 9(4k - 5n + 2). \end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 2. Αποδείξτε τον τύπο αθροίσματος γεωμετρικής προόδου, ότι δηλαδή για κάθε αριθμό $r \neq 1$ και ακέραιο $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Απάντηση. Η πρόταση είναι προφανής για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n (ΕΥ). Τότε για $n + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} r^i &= r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} r^i \overset{\text{ΕΥ}}{=} r^{n+1} + \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{r^{n+1}(r-1) + r^{n+1} - 1}{r - 1} = \frac{r^{n+2} - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3. Δείξτε ότι για κάθε n:

- $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$.
- $3 \mid n^3 - 7n + 3$.
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Απάντηση. • Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n+1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+2} i \cdot 2^i &= (n+2)2^{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i \overset{\text{EY}}{=} (n+2) \cdot 2^{n+2} + n \cdot 2^{n+2} + 2 \\ &= 2n \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} + 2 = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2 \\ &= (n+1) \cdot 2^{n+3} + 2.\end{aligned}$$

- Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n+1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 7(n+1) + 3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 7n - 7 + 3 \\ &\overset{\text{EY}}{=} (3k + 7n - 3) + 3n^2 - 4n - 3 = 3 \cdot (k + n^2 + n - 2).\end{aligned}$$

- Ελέγχουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και για $n+1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &\overset{\text{EY}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 4. Έστω $e_0, e_1, e_2, \ldots$ ακολουθία που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}&e_0 = 1, \quad e_1 = 2, \quad e_2 = 3, \\ &e_k = e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}, \text{ για } k \geq 3.\end{aligned}$$

Δείξτε ότι $e_n \leq 3^n$ για κάθε $n \geq 0$.

Απάντηση. Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή. Παρατηρούμε ότι πράγματι $e_n \leq 3^n$ για $n = 0, 1, 2$. Υποθέτουμε ότι $e_k \leq 3^k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$ για κάποιο $n \geq 2$ (ΕΥ). Τότε για $n+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + e_{n-2} &\overset{\text{EY}}{\leq} 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} \\ &< 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 5. Αν $f(x) = xe^x$ και $g(x) = e^{cx}$, δείξτε ότι οι n-στες παράγωγοί τους είναι $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ και $g^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$ αντίστοιχα.

Απάντηση. Για $n = 0$ ισχύουν και οι δύο προτάσεις. Έστω ότι ισχύουν για n (ΕΥ). Τότε για $n+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = ((x+n)e^x)' = (x+n)'e^x + (x+n)(e^x)' \\ &= e^x + (x+n)e^x = (x+(n+1))e^x, \end{aligned}$$

και

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = (c^n e^{cx})' = c^n c e^{cx} = c^{n+1}e^{cx}.$$ □

Άσκηση 6. Το τριόμινο είναι παρόμοιο με το ντόμινο, αλλά αποτελείται από τρία κομμάτια σε σχήμα Γ. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα της οποίας λείπει ένα οποιοδήποτε τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί από κομμάτια τριόμινο.

Απάντηση. Για την κατανόηση των παρακάτω επιχειρημάτων, καλό θα είναι να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε τα περιγραφόμενα βήματα.

Για $n = 1$ η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για n (ΕΥ). Ας πάρουμε τώρα μια σκακιέρα μεγέθους $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ της οποίας λείπει ένα τετράγωνο.

Χωρίζουμε την σκακιέρα στην μέση, τόσο στο μήκος, όσο και στο ύψος, με αποτέλεσμα να πάρουμε 4 (υπο)σκακιέρες μεγέθους $2^n \times 2^n$ η καθεμία. Εξ' αυτών, μια περιέχει το τετράγωνο που έλειπε από την από την αρχική σκακιέρα. Από την ΕΥ μπορούμε να καλύψουμε αυτήν την (υπο)σκακιέρα με κομμάτια τριόμινο.

Για τις άλλες 3 (υπο)σκακιέρες, τοποθετούμε ένα τριόμινο στην μέση της αρχικής σκακιέρα, έτσι ώστε να καλύψει ένα ακριβώς τετράγωνο από την καθεμία. Πλέον και οι τρεις αυτές (υπο)σκακιέρες υπολείπονται ακριβώς ενός τετραγώνου, επομένως καλύπτονται και αυτές με την σειρά τους με κομμάτια τριόμινο από την ΕΥ. □

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με $n \geq 3$ κορυφές είναι $(n-2)\pi$.

Απάντηση. Για την κατανόηση των παρακάτω επιχειρημάτων, καλό θα είναι να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε τα περιγραφόμενα βήματα.

Για $n = 3$ η ισχύς της πρότασης είναι γνωστή. Υποθέτουμε ότι ένα κυρτό n-γωνο έχει άθροισμα γωνιών $(n-2)\pi$ (ΕΥ). Ας πάρουμε τώρα ένα κυρτό $(n+1)$-γωνο. Ενώνουμε τα απομακρυσμένα άκρα δύο διαδοχικών πλευρών, έτσι ώστε να χωρίσουμε το σχήμα μας σε ένα τρίγωνο και ένα n-γωνο. Επίσης παρατηρούμε ότι το άθροισμα των γωνιών του αρχικού μας σχήματος είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών των δύο νέων σχημάτων.

Από την ΕΥ το n-γωνο έχει άθροισμα γωνιών $(n-2)\pi$ και το τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών π. Επομένως το $(n+1)$-γωνο έχει άθροισμα γωνιών $(n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi$ και το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 8.

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \cup B = [n]$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subset B$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $\emptyset \subset A \subset B$;

Απάντηση.

- Προκειμένου να έχουμε $A \subseteq B \subseteq [n]$, για κάθε στοιχείο $x \in [n]$ έχουμε τις εξής επιλογές:

  1. $x \in A, x \in B$,
  2. $x \in B, x \notin A$,
  3. $x \notin B, x \notin A$.

  Εφόσον έχουμε συνολικά n τέτοια στοιχεία, συνολικά οι επιλογές μας είναι

  $$\underbrace{3 \cdots 3}_{n \text{ φορές}} = 3^n.$$

- Προκειμένου να έχουμε $A \cup B \subseteq [n]$, για κάθε στοιχείο $x \in [n]$ έχουμε τις εξής επιλογές:

  1. $x \in A, x \in B$,
  2. $x \in B, x \notin A$,
  3. $x \notin B, x \in A$.

  Εφόσον έχουμε συνολικά n τέτοια στοιχεία, συνολικά οι επιλογές μας είναι

  $$\underbrace{3 \cdots 3}_{n \text{ φορές}} = 3^n.$$

- Προκειμένου να έχουμε $A \subset B \subseteq [n]$, αρκεί να μετρήσουμε τις επιλογές μας για να πάρουμε $A \subseteq B \subseteq [n]$ και από αυτές να αφαιρέσουμε εκείνες όπου $A = B$. Τον πρώτο αριθμό τον υπολογίσαμε (σε προηγούμενο ερώτημα) ως 3^n και, όσον αφορά στον δεύτερο, εύκολα βλέπουμε ότι ουσιαστικά ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$, δηλαδή με 2^n. Επομένως η απάντηση είναι

  $$3^n - 2^n.$$

- Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε όπως πριν, απλά επίσης να αφαιρέσουμε και την περίπτωση $B \subseteq [n]$ και $A = \emptyset$ που συμβαίνει ακριβώς 2^n φορές. Θα πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι η περίπτωση (και μόνο αυτή) $A = B = \emptyset$ έχει αφαιρεθεί δύο φορές. Καταλήγουμε ότι η απάντηση είναι

  $$3^n - 2^n - 2^n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 1. \qquad \square$$

Άσκηση 9. Έστω μια 8×8 σκακιέρα. Πόσα ορθογώνια που δεν είναι τετράγωνα μπορούμε να σχεδιάσουμε με κορυφές πλευρές της σκακιέρας;

Απάντηση. Για την κατανόηση των παρακάτω επιχειρημάτων, καλό θα είναι να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε τα περιγραφόμενα βήματα.

Κάθε τέτοιο ορθογώνιο ορίζεται μονοσήμαντα ως η τομή μιας κάθετης και μιας οριζόντιας ”λωρίδας” στην σκακιέρα. Κάθε μια από αυτές τις λωρίδες, ορίζεται μονοσήμαντα από ένα υποσύνολο μεγέθους 2 του $\{0, 1, \ldots, 8\}$, που οριοθετεί τα άκρα του. Για κάθε ένα από αυτά τα δισύνολα μπορούν να επιλεχθούν με $\binom{9}{2}$ τρόπους. Καταλήγουμε ότι έχουμε συνολικά $\binom{9}{2}^2$ τέτοια ορθογώνια.

Όμως, παρατηρούμε ότι με το μέτρημα αυτό έχουμε συμπεριλάβει και τα τετράγωνα, δηλαδή θα πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος τους. Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, 8$ υπάρχουν ακριβώς $(9-i)^2$ τετράγωνα πλευράς μήκους i με πλευρές στα άκρα της σκακιέρας. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{8}(9-i)^2 = \sum_{i=1}^{8} i^2$$

τέτοια τετράγωνα. Ακόμα, μπορούμε με επαγωγή να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

επομένως το πλήθος των τετραγώνων θα είναι ίσο με $8 \cdot 9 \cdot 17/6$.

Καταλήγουμε ότι συνολικά υπάρχουν $\binom{9}{2}^2 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6}$ ορθογώνια, που δεν είναι τετράγωνα. □

Άσκηση 10. Αν από μια 8×8 σκακιέρα βγάλουμε δυο αντιδιαμετρικά γωνιακά τετράγωνα, με πόσους τρόπους μπορούμε να καλύψουμε ακριβώς την σκακιέρα με (μη επικαλυπτόμενα μεταξύ τους) ντόμινο.

Απάντηση. Για την κατανόηση των παρακάτω επιχειρημάτων, καλό θα είναι να προσπαθήσετε να σχεδιάσετε τα περιγραφόμενα βήματα.

Χρωματίζουμε την σκακιέρα με άσπρα και μαύρα τετράγωνα, όπως τις σκακιέρες του σκακιού. Τώρα παρατηρούμε ότι ένα ντόμινο που θα τοποθετηθεί στην σκακιέρα καλύπτει ακριβώς ένα μαύρο και ένα άσπρο τετράγωνο, με άλλα λόγια πολλά ντόμινο θα έχουν καλύψει τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων τετραγώνων.

Όμως αν βγάλουμε δυο αντιδιαμετρικά γωνιακά τετράγωνα από μια 8×8 σκακιέρα, τα τετράγωνα αυτά έχουν το ίδιο χρώμα, δηλαδή η σκακιέρα μας δεν έχει το ίδιο πλήθος άσπρων και μαύρων τετραγώνων. Καταλήγουμε ότι είναι αδύνατον να γίνει η ζητούμενη κάλυψη! □

Άσκηση 11. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 5$, $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-2}$.

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 5$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \geq 5$ (ΕΥ). Τότε για $n+1$ έχουμε:

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1}.$$

Από την ΕΥ, έχουμε $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-2}$, ενώ $\frac{2n+1}{n+1} < 2$. Καταλήγουμε ότι

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < 2^{2n-2} \cdot 2^2 = 2^{2(n+1)-2}.$$

□

Άσκηση 12. Πόσοι θετικοί ακέραιοι n υπάρχουν με $n \mid 4800$ και $4 \nmid n$;

Απάντηση. Έχουμε ότι $4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$. Επομένως έχουμε ότι $n \mid 4800 \iff n = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, με $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 1$ και $0 \leq k \leq 2$. Ταυτόχρονα $4 = 2^2 \nmid n \iff i < 2$. Άρα για να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί, αρκεί $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 1$ και $0 \leq k \leq 2$, οπότε έχουμε 2 επιλογές για το i, 2 επιλογές για το j και 3 επιλογές για το k. Συνολικά έχουμε

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

επιλογές. □

Άσκηση 13. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Απάντηση. Για $n = 0$ η πρόταση ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n (ΕΥ). Για $n+1$, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! & \\ &\overset{\text{ΕΥ}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 14. Αν $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, να βρείτε το πλήθος των αρτίων και των περιττών συναρτήσεων $f : A \to A$; (Μια συνάρτηση f είναι *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$ και είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.)

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα $\mathcal{A} = \{f : A \to A, f \text{ άρτια}\}$ και $\mathcal{B} = \{g : \{0, 1, \ldots, n\} \to A\}$, ως εξής:

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \ : \ f(x) \mapsto g(x) = f\,|_{\{0,1,\ldots,n\}}$$

$$\mathcal{B} \to \mathcal{A} \ : \ g(x) \mapsto f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ g(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Επομένως $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = |A^{\{0,1,\ldots,n\}}| = |A|^{|\{0,1,\ldots,n\}|} = (2n+1)^{n+1}$.

Για τις περιττές συναρτήσεις παρατηρούμε ότι επειδή αν f περιττή έχουμε ότι $f(0) = 0$, επομένως (ομοίως με πριν) η αντιστοιχία θα είναι ανάμεσα στις περιττές $f : A \to A$ και στις συναρτήσεις $\{1, \ldots, n\} \to A$ που είναι $(2n+1)^n$ το πλήθος. □

Άσκηση 15. Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα A με χωρητικότητα 80 αριθμημένων θέσεων και την αίθουσα B με χωρητικότητα 40 αριθμημένων θέσεων.

1. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.
2. Έστω ότι από τους (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Απάντηση. 1. Ο πρώτος φοιτητής έχει 120 θέσεις να επιλέξει. Ο δεύτερος 119 κ.ο.κ.. Έτσι έχουμε συνολικά $120 \cdot 119 \cdots 21 = \frac{120!}{20!}$ επιλογές.

2. Θα πάρουμε δύο περιπτώσεις:

   (α′) Τα αγόρια κάθονται στην αίθουσα A. Τότε (με την ίδια λογική με πριν) τα αγόρια θα κάτσουν με $\frac{80!}{40!}$ τρόπους, ενώ τα 60 κορίτσια θα κάτσουν στις υπόλοιπες 80 θέσεις με $\frac{80!}{20!}$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $\frac{80!}{40!} \cdot \frac{80!}{20!}$ τρόπους.

   (β′) Τα αγόρια κάθονται στην αίθουσα B. Τότε η αίθουσα αυτή θα γεμίσει με τα αγόρια με $40!$ τρόπους και τα κορίτσια θα κάτσουν στην A με $\frac{80!}{20!}$ τρόπους. Συνολικά θα έχουμε $40! \cdot \frac{80!}{20!}$ τρόπους.

   Καταλήγουμε ότι συνολικά θα έχουμε

$$\frac{80!}{40!} \cdot \frac{80!}{20!} + 40! \cdot \frac{80!}{20!} = \frac{80!}{20!} \cdot \left(\frac{80!}{40!} + 40! \right)$$

   τρόπους. □

Άσκηση 16. Στα παρακάτω ερωτήματα δεν επιτρέπονται επαναλήψεις.

- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς < 4000 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους άρτιους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους περιττούς τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς και πολλαπλάσια του 5 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς που περιέχουν και το ψηφίο 5 και το ψηφίο 3 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;

Απάντηση. • Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 6 επιλογές, για το δεύτερο 5, για το τρίτο 4 και για το τέταρτο 3. Συνολικά $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

- Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 3 επιλογές (1, 2, 3), για το δεύτερο 5, για το τρίτο 4 και για το τέταρτο 3. Συνολικά $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 2 επιλογές (2, 8), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 4 επιλογές (1, 3, 5, 7), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

  Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφτούμε ότι έχουμε όλες τις επιλογές (του πρώτου ερωτήματος) εκτός των άρτιων (του προηγούμενου ερωτήματος), δηλαδή $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

- Για το τελευταίο ψηφίο έχουμε 1 επιλογή (5), για το τρίτο 5, για το δεύτερο 4 και για το πρώτο 3. Συνολικά $5 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές.

- Έχουμε 4 τρόπους να τοποθετήσουμε το ψηφίο 5 (σε μια από τις 4 θέσεις) και 3 τρόπους να τοποθετήσουμε το ψηφίο 3 (σε μια από τις υπόλοιπες 3 θέσεις). Η πρώτη από τις υπόλοιπες θέσεις μπορεί να πληρωθεί με 4 τρόπους και η δεύτερη με 3. Συνολικά θα έχουμε $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$ επιλογές. $\square$