ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - MEM241 (ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-21)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

1ο σετ ασκήσεων (Επαγωγή - Βασικές αρχές απαρίθμησης)

Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις της Παραγράφου 1.9, τις ασκήσεις 1.36–1.44 και εκείνες του Κεφαλαίου 3.

Άσκηση 1. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$, $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Άσκηση 2. Αποδείξτε τον τύπο αθροίσματος γεωμετρικής προόδου, ότι δηλαδή για κάθε αριθμό $r \neq 1$ και ακέραιο $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι για κάθε n:

- $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+2} + 2$.
- $3 \mid n^3 - 7n + 3$.
- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Άσκηση 4. Έστω $e_0, e_1, e_2, \ldots$ ακολουθία που ορίζεται ως εξής:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = 2, \quad e_2 = 3,$$
$$e_k = e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}, \text{ για } k \geq 3.$$

Δείξτε ότι $e_n \leq 3^n$ για κάθε $n \geq 0$.

Άσκηση 5. Αν $f(x) = xe^x$ και $g(x) = e^{cx}$, δείξτε ότι οι n-στες παράγωγοί τους είναι $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ και $g^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 6. Το τριόμινο είναι παρόμοιο με το ντόμινο, αλλά αποτελείται από τρία κομμάτια σε σχήμα Γ. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, δείξτε ότι κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα της οποίας λείπει ένα οποιοδήποτε τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί από κομμάτια τριόμινο.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με $n \geq 3$ κορυφές είναι $(n-2)\pi$.

Άσκηση 8.
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \cup B = [n]$;

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $A \subset B$;
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A, B του $[n]$ ώστε $\emptyset \subset A \subset B$;

Άσκηση 9. Έστω μια 8×8 σκακιέρα. Πόσα ορθογώνια που δεν είναι τετράγωνα μπορούμε να σχεδιάσουμε με κορυφές πλευρές της σκακιέρας;

Άσκηση 10. Αν από μια 8×8 σκακιέρα βγάλουμε δυο αντιδιαμετρικά γωνιακά τετράγωνα, με πόσους τρόπους μπορούμε να καλύψουμε ακριβώς την σκακιέρα με (μη επικαλυπτόμενα μεταξύ τους) ντόμινο.

Άσκηση 11. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 5$, $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-2}$.

Άσκηση 12. Πόσοι θετικοί ακέραιοι n υπάρχουν με $n \mid 4800$ και $4 \nmid n$;

Άσκηση 13. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Άσκηση 14. Αν $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$, να βρείτε το πλήθος των αρτίων και των περιττών συναρτήσεων $f : A \to A$; (Μια συνάρτηση f είναι *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$ και είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.)

Άσκηση 15. Έστω ότι 100 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα A με χωρητικότητα 80 αριθμημένων θέσεων και την αίθουσα B με χωρητικότητα 40 αριθμημένων θέσεων.

1. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.
2. Έστω ότι από τους (διαφορετικούς) φοιτητές, 60 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Άσκηση 16. Στα παρακάτω ερωτήματα δεν επιτρέπονται επαναλήψεις.

- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς < 4000 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους άρτιους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους περιττούς τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς και πολλαπλάσια του 5 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;
- Πόσους τετραψήφιους αριθμούς που περιέχουν και το ψηφίο 5 και το ψηφίο 3 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 5, 7, 8$;