

MEM241 - ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

26η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 22/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ 4ΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

Άσκηση 1

Άσκηση

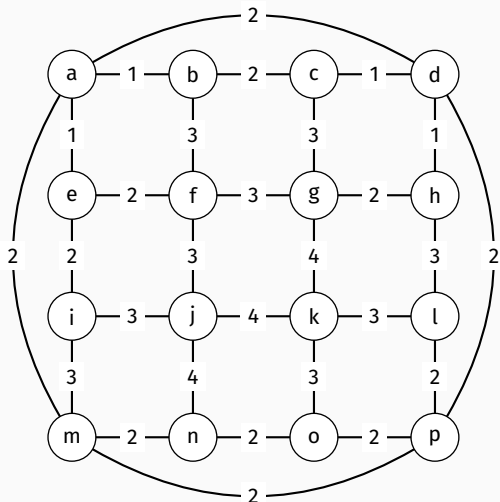
Δείξτε ότι αν στο γράφημα G υπάρχουν s κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε $\chi(G) \leq n - s + 1$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Χρωματίζουμε το γράφημα ως εξής: εφόσον υπάρχουν s κορυφές που δεν συνδέονται μεταξύ τους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο χρώμα για τον χρωματισμό αυτών των κορυφών, ενώ χρησιμοποιούμε από ένα διαφορετικό χρώμα για κάθεμία από τις υπόλοιπες $n - s$ κορυφές. Καταλήγουμε με έναν χρωματισμό του γραφήματος που δύο γειτονικές κορυφές έχουν χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα και έχουν χρησιμοποιηθεί συνολικά $n - s + 1$ χρώματα. Το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 2

Άσκηση

Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Dijkstra για να βρείτε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την κορυφή a στην κορυφή k και από την κορυφή e στην κορυφή l στο παρακάτω γράφημα:



Δείτε το βίντεο για την απάντηση!

Άσκηση 3

Άσκηση

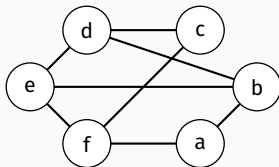
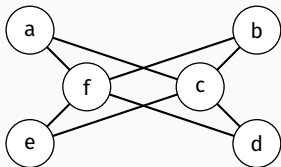
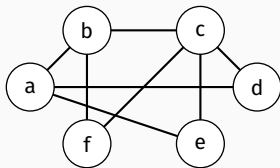
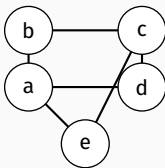
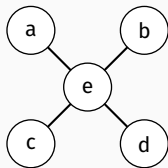
Δείξτε ότι ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους.

Η λύση υπάρχει στις λύσεις του Φυλλαδίου 3.

Άσκηση 4

Άσκηση

Βρείτε τον χρωματικό αριθμό των παρακάτω γραφημάτων και εξετάστε αν είναι διμερή.



Δείτε το βίντεο για την απάντηση!

Άσκηση 5

Άσκηση

Μια εταιρεία έχει 5 εργαζόμενους: Ζηνοβία, Αχιλλέας, Σταμάτης, Τάσος και Μαρία. Κάθε εργαζόμενος θα αναλάβει ένα από τα παρακάτω πόστα: Σχεδιασμός, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις, Μάρκετινγκ, Ανάπτυξη, Βιομηχανικός σχεδιασμός.

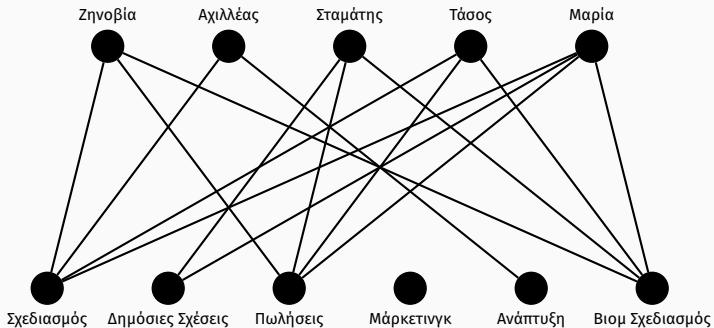
Η Ζηνοβία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Αχιλλέας μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό ή Ανάπτυξη. Ο Σταμάτης μπορεί να αναλάβει Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Ο Τάσος μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό. Τέλος, η Μαρία μπορεί να αναλάβει Σχεδιασμό, Δημόσιες σχέσεις, Πωλήσεις ή Βιομηχανικό σχεδιασμό.

Άσκηση

1. Μοντελοποιήστε τις ικανότητες των εργαζομένων σε ένα διμερές γράφημα.
2. Δώστε σε κάθε εργαζόμενο ένα πόστο που μπορεί να αναλάβει.

Μοντελοποιούμε τις ικανότητες των εργαζομένων στο παρακάτω διάγραμμα.

Άσκηση 5



Ξεκινάμε με το ταίριασμα Ζηνοβία-Πωλήσεις,
Αχιλλέας-Σχεδιασμός, Σταμάτης-Βιομ. Σχεδιασμός και
Μαρία-Δημ. Σχέσεις.

Άσκηση 5

Εύκολα βλέπουμε ότι το παραπάνω ταίριασμα δεν είναι πλήρες, ενώ παρατηρούμε ότι το μονοπάτι

Τάσος → Σχεδιασμός → Αχιλλέας → Ανάπτυξη

είναι ένα επαυξάνον μονοπάτι του παραπάνω ταιριάσματος, άρα το ταίριασμά μας μπορεί να βελτιωθεί στο:
Ζηνωβία-Πωλήσεις, Τάσος-Σχεδιασμός, Αχιλλέας-Ανάπτυξη
Σταμάτης-Βιομ. Σχεδιασμός και Μαρία-Δημ. Σχέσεις. Μάλιστα το ταίριασμα αυτό είναι πλήρες.

Άσκηση 6

Άσκηση

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας, του οποίου οι εγγραφές βρίσκονται στο σύνολο $\{0, 1\}$. Ονομάζουμε ευθεία του πίνακα μια γραμμή ή μια στήλη του. Δείξτε ότι το ελάχιστο πλήθος ευθειών που περιέχει όλα τα 1 του πίνακα είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος των 1 που δεν βρίσκονται ανά δύο στην ίδια ευθεία.

Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα, με κορυφές R_1, \dots, R_m και C_1, \dots, C_n , όπου η κορυφή R_i αντιστοιχεί στην i -στή γραμμή του A και η κορυφή C_j στην j -στή στήλη του A και θα έχουμε ότι το γράφημα θα περιέχει την ακμή $\{R_i, C_j\}$ αν και μόνο αν $A_{i,j} = 1$.

Άσκηση 6

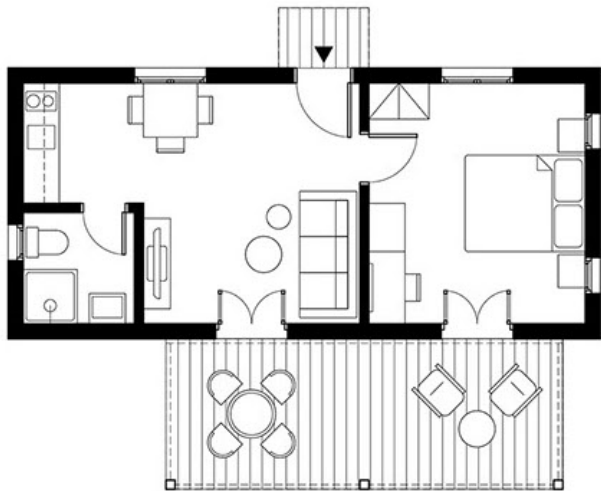
Με άλλα λόγια, το γράφημα έχει για κορυφές τις ευθείες του πίνακα και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν τέμνονται σε “1”, δηλαδή κάθε “1” είναι μια ακμή του γραφήματος.

Εύκολα βλέπουμε ότι η επιλογή κάποιων “1” που δεν βρίσκονται ανά δύο στην ίδια ευθεία αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα του γραφήματος, ενώ η επιλογή ευθειών που περιέχουν όλα τα “1” αντιστοιχεί σε ένα κάλυμμα. Τη ζητούμενο έπεται από το θεώρημα König-Egernáry.

Άσκηση

Αφού βρείτε την κάτοψη του σπιτιού σας (ή κάποιου άλλου κτηρίου/διαμερίσματος) αποδείξτε αν υπάρχει ή όχι τρόπος να διασχίσει κανείς τις πόρτες του σπιτιού σας ακριβώς μια φορά την κάθε μία. Γίνεται το δωμάτιο αφετηρίας και τερματισμού να είναι το ίδιο;

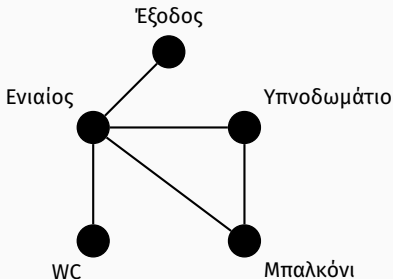
Άσκηση 7



Η κάτοψη ενός σπιτιού.

Άσκηση 7

Το επαγόμενο γράφημα της κάτοψης, όπου για κορυφές χρησιμοποιούμε τους χώρους του σπιτιού και για ακμές τις πόρτες είναι το εξής:



Πλέον το αρχικό ερώτημα γίνεται κατά πόσο το παραπάνω γράφημα έχει κύκλο ή/και μονοπάτι Euler.

Άσκηση 7

Καθώς παρατηρούμε ότι ακριβώς δύο κορυφές του έχουν περιττό βαθμό, το γράφημα έχει μονοπάτι, αλλά όχι κύκλο Euler, δηλαδή μπορούμε να περάσουμε από κάθε πόρτα ακριβώς μια φορά, αλλά δεν θα καταλήξουμε στο δωμάτιο από το οποίο ξεκινήσαμε.

Σύμφωνα με τον τρόπο κατασκευής μονοπατιών και κύκλων Euler που έχουμε δει, ένα τέτοιο μονοπάτι είναι το

Έξοδος \rightarrow Ενιαίος \rightarrow Υπνοδωμάτιο \rightarrow Μπαλκόνι \rightarrow Ενιαίος \rightarrow WC .

Άσκηση 8

Άσκηση

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ που περιέχει κύκλο Hamilton. Δείξτε ότι υπάρχει 2-κανονικό συνεκτικό υπογράφημα $H = (V, E')$ του G , τέτοιο ώστε $|V| = |E'|$.

Το ζητούμενο γράφημα είναι ακριβώς ο κύκλος Hamilton του γραφήματος!

Άσκηση

Αφού κατασκευάσετε το αντίστοιχο γράφημα, βρείτε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε έναν χάρτη των Βαλκανίων, ώστε δυο χώρες που συνορεύουν να έχουν διαφορετικό χρώμα.

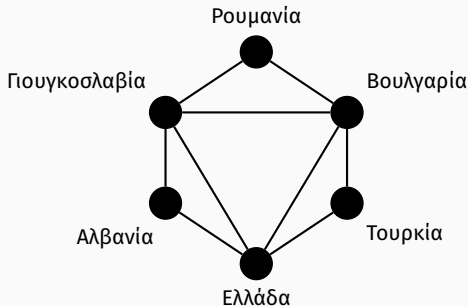
Άσκηση 9



Η βαλκανική χερσόνησος.

Άσκηση 9

Από τον χάρτη κατασκευάζουμε το παρακάτω γράφημα:



Κατασκευαστικά, βλέπουμε ότι το γράφημα αυτό έχει χρωματικό αριθμό 3 και ένας χρωματισμός του με 3 χρώματα είναι ο εξής: Χρώμα Α (Ρουμανία, Ελλάδα), Χρώμα Β (Γιουγκοσλαβία, Τουρκία), Χρώμα Γ (Βουλγαρία, Αλβανία).

Άσκηση 10

Άσκηση

Έστω $G = (V, E)$ απλό επίπεδο γράφημα με $n = |V|$ και $e = |E|$. Αν το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες, σε πόσες περιοχές διαμερίζει το G το επίπεδο;

Αναπαριστούμε το γράφημα με μια επίπεδη αναπαράσταση (χωρίς διασταυρώσεις ακμών). Έστω $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος, με $n_i = |V_i|$ και $e_i = |E_i|$ για $i = 1, \dots, k$. Τότε προφανώς έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^k e_i = e.$$

Άσκηση 10

Παρατηρούμε επίσης ότι η πρώτη συνιστώσα, από τον τύπο του Euler θα διαμερίσει το επίπεδο σε

$$r_1 = e_1 - n_1 + 2$$

περιοχές. Εφόσον έχουμε επίπεδη αναπαράσταση, η δεύτερη συνιστώσα, θα διαμερίσει ακριβώς μια από αυτές τις περιοχές σε $e_2 - n_2 + 2$ νέες περιοχές, δηλαδή συνολικά θα έχουμε

$$r_2 = (e_1 - n_1 + 2) - 1 + (e_2 - n_2 + 2) = (e_1 + e_2) - (n_1 + n_2) + 3$$

περιοχές. Επαγωγικά βλέπουμε ότι όταν θα λάβουμε υπόψιν μας την j -στή συνιστώσα, θα έχουμε

$$r_j = \left(\sum_{i=1}^j e_i \right) - \left(\sum_{i=1}^j n_i \right) + (j + 1)$$

περιοχές.

Άσκηση 10

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $j = k$ παίρνουμε ότι συνολικά το G διαμερίζει το επίπεδο σε

$$r = r_k = e - n + (k + 1)$$

περιοχές.

Καλές γιορτές!

Καλή επιτυχία στην εξεταστική!