

# MEM241 - ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

23η Διαδικτυακή Διάλεξη

---

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 17/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

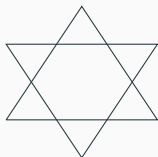
# **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΕ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥΣ EULER**

---

# Σχεδιάστε μονομιάς το σχήμα!

## Παράδειγμα

Γίνεται να σχεδιάσουμε τα παρακάτω σχήματα χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι;

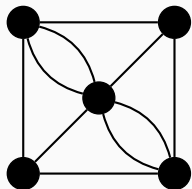
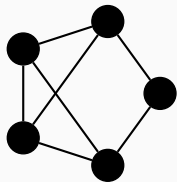


Δείτε το βίντεο για την απάντηση!

# Ύπαρξη κύκλου και μονοπατιού Euler

## Παράδειγμα

Βρείτε αν υπάρχει κύκλος ή μονοπάτι Euler στα παρακάτω γραφήματα και αν ναι, δείξτε το.



Δείτε το βίντεο για την απάντηση!

# **ΥΠΑΡΞΗ ΜΟΝΟΠΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΝ HAMILTON**

---

## Δύο υπαρξιακά θεωρήματα

Εν γένει, η ύπαρξη, η μη ύπαρξη και η κατασκευή των μονοπατιών και των κύκλων Hamilton αποτελούν δυσκολότερα προβλήματα από τα αντίστοιχα προβλήματα για κύκλους και μονοπάτια Euler. Τα παρακάτω θεωρήματα δίνονται χωρίς απόδειξη.

### Θεώρημα (Dirac)

Αν  $G$  απλό γράφημα  $n \geq 3$  κορυφών, τέτοιο ώστε  $\deg u \geq n/2$  για κάθε κορυφή  $u$  του γραφήματος, τότε το  $G$  έχει κύκλο Hamilton.

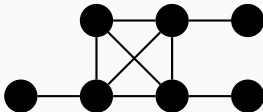
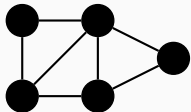
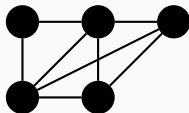
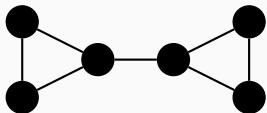
### Θεώρημα (Ore)

Αν  $G$  απλό γράφημα  $n \geq 3$  κορυφών, τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών  $u, v$  ισχύει ότι  $\deg u + \deg v \geq n$ , τότε το  $G$  έχει κύκλο Hamilton.

# Παραδείγματα

## Παράδειγμα

Εξηγήστε αν υπάρχει ή όχι μονοπάτι ή κύκλος Hamilton για τα παρακάτω γραφήματα.



Δείτε το βίντεο για την απάντηση!

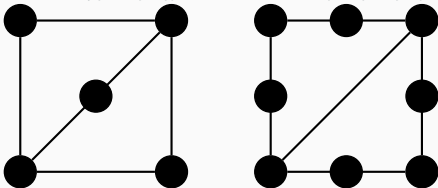
# ΟΜΟΜΟΡΦΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

---



# Ορισμός

- Έστω ένα γράφημα  $G$  και  $\{u, v\}$  μια ακμή του. Η διαδικασία, κατά την οποία διαγράφουμε την ακμή  $\{u, v\}$  από το γράφημα, προσθέτουμε στο γράφημα μια νέα κορυφή  $w$  και τις ακμές  $\{u, w\}$  και  $\{w, v\}$ , ονομάζεται **στοιχειώδης υποδιαίρεση**.
- Δυο γραφήματα που μπορούν να προκύψουν από το ίδιο γράφημα μετά από κάποιες στοιχειώδης υποδιαίρεσεις ονομάζονται **ομομορφικά**.
- Π.χ., τα παρακάτω γραφήματα είναι ομομορφικά:



# ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

---

## Ορισμός

Ένα γράφημα λέγεται **επίπεδο** αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ακμές του να μην διασταυρώνονται.

## Παρατήρηση

Ένα γράφημα μπορεί να είναι επίπεδο ακόμα και αν σε κάποια γραφική αναπαράστασή του κάποιες ακμές του διασταυρώνονται.

# Ένα ιστορικό θεώρημα

## Θεώρημα (Το θεώρημα των 4 χρωμάτων)

Αν  $G$  επίπεδο γράφημα, τότε  $\chi(G) \leq 4$ .

- Διατυπώθηκε ως εικασία περίπου το 1850.
- Αποδείχθηκε το 1976 από τους Appel και Haken και ήταν η πρώτη σημαντική απόδειξη στην οποία έγινε εκτεταμένη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, αφού χρειάστηκαν πάνω από 1000 ώρες υπολογιστικού χρόνου.
- Πριν από αυτήν την απόδειξη είχαν παρουσιαστεί πολλές λανθασμένες αποδείξεις.
- Η πιο γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος εντοπίζεται στην χαρτογραφία.

## Ένα παράδειγμα



Ας κατασκευάσουμε το γράφημα που επάγεται από τον χάρτη της Νότιας Αμερικής και, αφού υπολογίσουμε τον χρωματικό αριθμό, ας χρωματίσουμε τον χάρτη, με τα λιγότερα δυνατά χρώματα.

Δείτε το βίντεο για την απάντηση!