MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

21η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 10/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Πλήρη Ταιριάσματα

Εισαγωγή

Ορισμός

Δύο ακμές ενός γραφήματος λέγονται ανεξάρτητες αν δεν έχουν κοινή κορυφή. Ένα σύνολο ανεξάρτητων ακμών λέγεται ταίριασμα. Αν το γράφημά είναι διμερές με A και B μια *κατάλληλη* διαμέριση των κορυφών του και $\mathcal{M}$ ένα ταίριασμα τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του A να ανήκει σε κάποια ακμή του $\mathcal{M}$, τότε λέμε ότι το $\mathcal{M}$ είναι ένα πλήρες ταίριασμα του A.

- Είναι ξεκάθαρο ότι σε ένα διμερές γράφημα με A και B μια κατάλληλη διαμέριση κορυφών, έχουμε ότι αν το A έχει ένα πλήρες ταίριασμα, τότε $|A| \leq |B|$.

Το θεώρημα του Γάμου

Ορισμός

Έστω ένα διμερές γράφημα με A και B μια κατάλληλη διαμέριση, τότε για κάθε $J \subseteq A$, ορίζουμε

$$N(J) = \{b \in B \mid \text{η } b \text{ γειτονεύει με κορυφή του } J\}.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το θεώρημα του Γάμου (και της συνθήκης του Hall) ως εξής:

Θεώρημα (Το θεώρημα του Γάμου)

Αν G διμερές γράφημα με A και B μια κατάλληλη διαμέριση των κορυφών του, τότε υπάρχει πλήρες ταίριασμα για το A αν και μόνο αν για κάθε $J \subseteq A$, έχουμε ότι $|N(J)| \geq |J|$.

Μερικά πορίσματα

Πόρισμα

Κάθε r-κανονικό διμερές γράφημα έχει πλήρες ταίριασμα (όπου $r \geq 1$).

Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό διμερές και A, B μια διαμέριση του V που το καθιστά διμερές. Έστω $J \subseteq A$. Θέτω

$$E_1 = \{e \in E \ : \ e \text{ ξεκινάει από κορυφή του } J\}.$$

Επειδή G r-κανονικό διμερές έχουμε ότι $|E_1| = r|J|$. Ακόμα, θέτουμε

$$E_2 = \{e \in E \ : \ e \text{ καταλήγει σε κορυφή του } N(J)\}$$

και ομοίως με πριν θα πάρουμε $|E_2| = r|N(J)|$. Εύκολα βλέπουμε ότι $E_1 \subseteq E_2$, άρα $|J| \leq |N(J)|$ και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα του Γάμου.

Μερικά πορίσματα

Πόρισμα

Κάθε r-κανονικό διμερές γράφημα έχει τουλάχιστον r πλήρη ταιριάσματα ($r \geq 1$).

Θα εργαστούμε με επαγωγή στο r. Για $r = 1$ το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο πόρισμα. Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $r - 1$ (ΕΥ).

Έστω ένα r-κανονικό διμερές γράφημα. Από το προηγούμενο πόρισμα, θα υπάρχει κάποιο πλήρες ταίριασμά του. Διαγράφουμε από το γράφημα όλες τις ακμές του ταιριάσματος. Παίρνουμε ένα $(r - 1)$-κανονικό διμερές γράφημα. Από την ΕΥ το νέο γράφημα έχει $\geq r - 1$ πλήρη ταιριάσματα, τα οποία είναι πλήρη ταιριάσματα και του αρχικού γραφήματος, μάλιστα διαφορετικά από εκείνο που διαγράψαμε. Το ζητούμενο έπεται.

Μία άσκηση

Παράδειγμα

Παίρνουμε μια τράπουλα των 52 φύλλων (χωρίς Joker). Χωρίζουμε τυχαία την τράπουλα σε 13 στοίβες των 4 φύλλων η καθεμία. Δείξτε ότι είναι εφικτό να διαλέξουμε ένα φύλλο από κάθε στοίβα, έτσι ώστε να εμφανίζεται κάθε είδος (A,2,...,10,J,Q,K) ακριβώς μια φορά.

Ονομάζουμε τις στοίβες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{13}$ και κατασκευάζουμε ένα γράφημα με κορυφές $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{13}, A, 2, \ldots, 10, J, Q, K$. Στη συνέχεια ανοίγουμε τις στοίβες και τοποθετούμε ακμές στο γράφημα σύμφωνα με τον κανόνα ότι η στοίβα Σ_i θα ενώνεται μόνο με τα είδη τραπουλόχαρτων που περιέχει. Εύκολα βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε ένα διμερές γράφημα και ουσιαστικά αναρωτιόμαστε κατά πόσον έχει ένα πλήρες ταίριασμα.

Μία άσκηση

Έστω $J \subseteq \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{13}\}$ με $|J| = n$. Αρκεί νδό $|J| \leq |N(J)|$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

Για $n = 1$ ο ισχυρισμός είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει για n (ΕΥ).

Έστω $|J| = n + 1$. Έστω $\Sigma_k \in J$. Θέτω $J' = J \setminus \{\Sigma_k\}$. Προφανώς $|J'| = n$ και από την ΕΥ, έχουμε ότι $|N(J')| \geq n$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Μία άσκηση

1. Αν $|N(J')| \geq n + 1$, τότε (επειδή $N(J) \supseteq N(J')$), $|N(J)| \geq n + 1$ και το ζητούμενο έπεται.
2. Αν $|N(J')| = n$, τότε υπάρχουν n είδη τραπουλόχαρτων που όλα τα χρώματά τους υπάρχουν ήδη στις στοίβες του J'. Επομένως, η Σ_k περιέχει τουλάχιστον ένα είδος τραπουλόχαρτων που δεν υπάρχει στο J', δηλαδή

   $$|N(J)| \geq |N(J')| + 1 = n + 1.$$

   Το ζητούμενο έπεται.

Μεγιστα Ταιριασματα

Ορισμοί

- Έστω G διμερές γράφημα. Ένα ταίριασμα με το μέγιστο πλήθος ακμών λέγεται μέγιστο.
- Μια κορυφή ενός διμερούς γραφήματος που δεν καλύπτεται από ένα ταίριασμα $\mathcal{M}$ λέγεται αταίριαστη.
- Έστω G διμερές γράφημα, A, B κατάλληλη διαμέριση των κορυφών του και $\mathcal{M}$ ένα ταίριασμα. Ένα μονοπάτι, χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές, που ξεκινά από αταίριαστη κορυφή και περιέχει εναλλάξ ακμές εντός και εκτός του $\mathcal{M}$ ονομάζεται εναλλακτικό μονοπάτι. Ένα εναλλακτικό μονοπάτι που ξεκινά από αταίριαστη κορυφή του A και καταλήγει σε αταίριαστη κορυφή του B ονομάζεται επαυξάνον μονοπάτι.

Ένας χαρακτηρισμός

Θεώρημα

Ένα ταίριασμα είναι μέγιστο αν και μόνο αν δεν έχει επαυξάνον μονοπάτι.

Ξεκινάμε με το ευθύ. Έστω $\mathcal{M}$ μέγιστο ταίριασμα με επαυξάνον μονοπάτι. Από το $\mathcal{M}$ αφαιρώ τις ακμές που είναι στο μονοπάτι και προσθέτω τις ακμές του μονοπατιού που δεν ήταν αρχικά στο ταίριασμα. Το νέο σύνολο είναι ένα ταίριασμα με μια επιπλέον ακμή, άτοπο.

Προχωράμε στο αντίστροφο. Έστω $\mathcal{M}_1$ ταίριασμα του γραφήματος G χωρίς επαυξάνον μονοπάτι και $\mathcal{M}_2$ μέγιστο ταίριασμα. Έστω G' το γράφημα με ακμές τις $(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \setminus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$ και με τις ίδιες κορυφές με το G.

Ένας χαρακτηρισμός

Στο G' όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ≤ 2, δηλαδή κάθε συνεκτική συνιστώσα του G' είναι κύκλος ή μονοπάτι, ενώ οι ακμές (αν δούμε κάθε συνιστώσα ως μονοπάτι) προέρχονται εναλλάξ από τα $\mathcal{M}_1$ και $\mathcal{M}_2$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν μια συνιστώσα είναι κύκλος, θα έχει άρτιο το πλήθος ακμές (ως διμερής κύκλος), άρα ακριβώς οι μισές ακμές προέρχονται από το $\mathcal{M}_1$.
- Αν μια συνιστώσα είναι μονοπάτι, τέτοιο ώστε να έχει περισσότερες ακμές από το $\mathcal{M}_2$, τότε αυτό θα είναι ένα επαυξάνον μονοπάτι του $\mathcal{M}_1$, άτοπο. Άρα τουλάχιστον οι μισές ακμές του μονοπατιού προέρχονται από το $\mathcal{M}_1$.

Συνολικά, το $\mathcal{M}_1$ έχει περισσότερες ή ίσες ακμές από το $\mathcal{M}_2$.

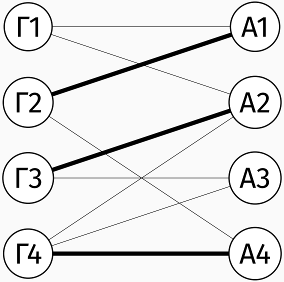
Ένας χαρακτηρισμός

Παρατήρηση

Το τελευταίο, εκτός από έναν χαρακτηρισμό ενός μέγιστου ταιριάσματος, μας δίνει και έναν τρόπο για να βελτιώνουμε ένα ταίριασμα, εως ότου αυτό γίνει μέγιστο.

Ένα παράδειγμα

Οι πελάτες ενός γραφείου συνοικεσίων και οι προτιμήσεις τους αποτυπώνονται στο παρακάτω διμερές γράφημα.



Ένας υπάλληλος αποφάσισε να κάνει το ταίριασμα Γ2–Α1, Γ3–Α2 και Γ4–Α4. Βρείτε ένα επαυξάνον μονοπάτι του ταιριάσματος αυτού και χρησιμοποιήστε το ώστε να κατασκευάστε ένα πλήρες ταίριασμα.