# ΜΕΜ241 - Διακριτα Μαθηματικα

## 20η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 04/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

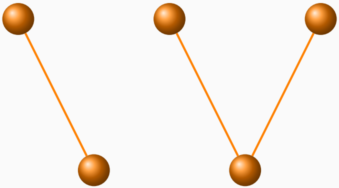
# Διμερη Γραφηματα

# Εισαγωγή

**Ορισμός**

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ θα λέγεται διμερές αν υπάρχει διαμέριση των κορυφών $V = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ τέτοια ώστε να μην υπάρχουν ακμές από το $A$ στο $A$ και από το $B$ στο $B$.

Το παρακάτω είναι ένα τυπικο παράδειγμα διμερούς γραφήματος:



## Μερικά πρώτα σχόλια

- Συνήθως αναπαριστούμε τα διμερή γραφήματα με τις κορυφές χωρισμένες σε δύο γραμμές ή δύο στήλες. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι ένα γράφημα που δεν αναπαρίσταται κατά αυτόν τον τρόπο δεν είναι διμερές.
- Η διαμέριση δεν είναι απαραίτητα μοναδική.
- Τα διμερή γραφήματα είναι πολύ χρήσιμα στο να φτιάχνουμε αντιστοιχίσεις (ταιριάσματα).
- Το τυπικό παράδειγμα διμερούς γραφήματος είναι αυτό του πλήρους διμερούς $K_{m,n}$ που έχουμε ήδη δει.

# Ένας χαρακτηρισμός

**Πρόταση**

*Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι διμερής.*

$\Rightarrow$ Έστω $G = (V, E)$ ένα διμερές γράφημα, $A, B$ μια διαμέριση των κορυφών που το καθιστά διμερές και $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_n = (V_n, E_n)$ οι συνεκτικές του συνιστώσες. Για $i = 1, \ldots, n$, θέτουμε $A_i = A \cap V_i$ και $B_i = B \cap V_i$. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $i$, $A_i, B_i$ διαμέριση του $V_i$ και ότι δεν υπάρχει ακμή από το $A_i$ στον εαυτό του, ούτε από το $B_i$ στον εαυτό του. Καταλήγουμε ότι $G_i = (V_i, E_i)$ διμερές για κάθε $i$.

# Ένας χαρακτηρισμός

$\Leftarrow$ Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_n = (V_n, E_n)$ οι συνεκτικές του συνιστώσες, τέτοιες ώστε να είναι διμερείς. Τότε για κάθε $i$ έχω μια διαμέριση $A_i, B_i$ του $V_i$, τέτοια ώστε δεν υπάρχει ακμή από το $A_i$ στον εαυτό του και από το $B_i$ στον εαυτό του. Μάλιστα, επειδή τα διαφορετικά $A_i$ ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες δεν υπάρχει ακμή από το $A_i$ στο $A_j$ (αν $i \neq j$), ενώ το αντίστοιχο ισχύει και για τα $B_i$ και $B_j$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\; \text{και} \;\; B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

ορίζει μια διαμέριση του $V$ τέτοια ώστε να καθιστά το $G$ διμερές.

## Τα δέντρα είναι διμερή γραφήματα

**Θεώρημα**

*Όλα τα δέντρα είναι διμερή γραφήματα.*

Έστω $T = (V, E)$ δέντρο με $|V| = n$. Θα δείξουμε ότι είναι διμερές γράφημα με επαγωγή στο $n$.

Η πρόταση είναι προφανής για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n - 1$ (ΕΥ).

Έστω $T$ δέντρο $n$ κορυφών. Έστω $u \in V$ ένα φύλλο του $T$ και $v$ ο μοναδικός του γείτονας. Θεωρούμε το γράφημα $T' = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$. Προφανώς το $T'$ είναι δέντρο και από την ΕΥ θα είναι διμερές. Άρα $A, B$ κατάλληλη διαμέριση των κορυφών του $T'$. Χβγ υποθέτουμε ότι $v \in A$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι τα σύνολα $A, B \cup \{u\}$ ορίζουν μια διαμέριση των κορυφών του $T$ που το καθιστούν διμερές.

# Υπογραφήματα διμερών γραφημάτων

**Λήμμα**

*Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλα τα υπογραφήματά του είναι διμερή.*

Το αντίστροφο είναι προφανές. Για το ευθύ, αν πάρουμε $A, B$ μια διαμέριση των κορυφών του $G$ που το καθιστά διμερές, τότε εύκολα βλέπουμε ότι αν $S = (V', E')$ υπογράφημα του $G$, τότε τα σύνολα $A' = A \cap V'$ και $B' = B \cap V'$ αποτελούν μια διαμέριση του $V'$ που καθιστά το $S$ διμερές.

# Κύκλοι και διμερή γραφήματα

**Πρόταση**

*Ο κύκλος $C_n$, όπου $n \geq 3$ είναι διμερής αν και μόνο αν $n$ άρτιος.*

Ο κύκλος $C_n$ είναι της μορφής $C_n = ([n], E)$, όπου

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{i, i+1\}\right) \cup \{n, 1\}.$$

Θα προσπαθήσουμε να διαμερίσουμε κατάλληλα το $[n]$ σε δύο σύνολα $A$ και $B$ ώστε να καταστεί διμερής ο $C_n$. Χβγ τοποθετούμε $1 \in A$. Τότε θα πρέπει $2 \in B$, $3 \in A$ κ.ο.κ.. Έτσι θα καταλήξουμε ότι, $n \in B$ αν $n$ άρτιο και $n \in A$ αν $n$ περιττό. Παρατηρούμε ότι, επειδή $\{n, 1\} \in E$, μόνο στην πρώτη περίπτωση έχουμε πράγματι μια διαμέριση που καθιστά διμερή τον $C_n$.

**Θεώρημα**

*Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος.*

Το ευθύ προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα. Έστω τώρα ένα $G = (V, E)$ με όλους τους κύκλους άρτιου μήκους. Χβγ, μπορούμε να υποθέσουμε επίσης ότι $G$ συνεκτικό. Σταθεροποιούμε κάποια κορυφή $u \in V$ και διαμερίζουμε το $V$ ως εξής:

$$A = \{v \in V \ : \ d(u, v) \text{ άρτια}\} \text{ και } B = \{v \in V \ : \ d(u, v) \text{ περιττή}\}.$$

Είναι ξεκάθαρο ότι $A \cup B = V$ και ότι $A \cap B = \emptyset$, επομένως τα $A, B$ διαμερίζουν το $V$ και αρκεί νδό αυτή η διαμέριση καθιστά διμερές το $G$. Άρα, αρκεί νδό δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές του $A$ ή ανάμεσα σε δύο κορυφές του $B$.

# Κύκλοι και διμερή γραφήματα

Έστω λοιπόν $a_1, a_2 \in A$ με $\{a_1, a_2\} \in E$. Αν $\pi_1$ μονοπάτι ελάχιστου μήκους από την $u$ στην $a_1$ και $\pi_2$ μονοπάτι ελάχιστου μήκους από την $u$ στην $a_2$, τότε θεωρούμε το μονοπάτι:

$$\underbrace{u \to \cdots \to a_1}_{\pi_1} \to \underbrace{a_2 \to \cdots \to u}_{\pi_2}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το παραπάνω είναι κύκλος περιττού μήκους, άτοπο.

Ομοίως μπορούμε νδό δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα σε κορυφές του $B$.

# Ο χρωματικός αριθμός

## Ορισμός και απλά παραδείγματα

**Ορισμός**

Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος $G$ είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ώστε να χρωματίσουμε τις κορυφές του γραφήματος με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ο χρωματικός αριθμός του $G$ συμβολίζεται με $\chi(G)$ και η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του $G$ ώστε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα λέγεται χρωματισμός του $G$.

- $\chi(E_n) = 1$.
- $\chi(K_n) = n$.
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ άρτιο}, \\ 3, & n \text{ περιττό}. \end{cases}$

# Κάτω φράγματα

Τα παρακάτω προκύπτουν απευθείας από τον ορισμό του χρωματικού αριθμού.

**Πρόταση**

*Έστω $S$ υπογράφημα του $G$, τότε $\chi(S) \leq \chi(G)$.*

**Πόρισμα**

*Αν το $G$ έχει κάποιο υπογράφημα ισόμορφο με το $K_n$, τότε $\chi(G) \geq n$.*

## Ένα άνω φράγμα

**Πρόταση**

*Έστω $G$ γράφημα τέτοιο ώστε για κάθε $u \in V$, $\deg u \leq d$, τότε $\chi(G) \leq d + 1$.*

Θα εργαστούμε με επαγωγή στο $n = |V|$. Για $n = 1$ η πρόταση είναι προφανής. Έστω ότι ισχύει η πρόταση για $n - 1$ (ΕΥ).

Έστω τώρα $G$ γράφημα $n$ κορυφών μέγιστου βαθμού $d$. Διαγράφω μια κορυφή $u$ μαζί με όλες τις ακμές της και παίρνουμε το γράφημα $G'$. Επειδή το $G'$ είναι γράφημα $n - 1$ κορυφών μέγιστου βαθμού $d$, από την ΕΥ, έχουμε ότι $\chi(G') \leq d + 1$, άρα υπάρχει χρωματισμός του $G'$ με $d + 1$ χρώματα. Εφαρμόζουμε τον χρωματισμό αυτόν στο $G'$.

Στην συνέχεια προσθέτουμε ξανά την $u$ και τις ακμές της και, επειδή $\deg u \leq d$, έχουμε ότι ακόμα και αν οι γείτονες της $u$ έχουν ο καθένας διαφορετικό χρώμα, θα υπάρχει κάποιο από $d+1$ χρώματα για να επιλέξουμε για την $u$, ώστε να έχει χρωματιστεί διαφορετικά από όλους της τους γείτονες.

Έτσι χρωματίζουμε το $G$ χρησιμοποιόντας $d+1$ χρώματα και το ζητούμενο έπεται.

# Ένα χρήσιμο κριτήριο

**Πρόταση**

*Ένα γράφημα $G$ είναι διμερές αν και μόνο αν $\chi(G) \leq 2$.*

Το $G$ είναι διμερές αν και μόνο αν μπορώ να διαμερίσω τις κορυφές του σε δύο σύνολα έτσι ώστε οι κορυφές του κάθε συνόλου να μην γειτονεύουν μεταξύ τους. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να χρωματίσω τις κορυφές με δύο χρώματα (ένα για τις κορυφές καθενός εκ των δύο συνόλων).