ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

19η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 03/12/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ο αλγοριθμος Floyd-Warshall

Λίγα λόγια για τον αλγόριθμο

- Ο αλγόριθμος αυτός, στην μορφή που έχει τελικά επικρατήσει, δημοσιεύτηκε το 1962 από τον Robert Floyd, με σημαντικές επιρροές από πρωτύτερα έργα των Bernard Roy και Stephen Warshall.
- Ο αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο ένα γράφημα με μη αρνητικά βάρη (κατευθυνόμενο ή μη) και επιστρέφει ως έξοδο τις αποστάσεις ανάμεσα στις κορυφές του γραφήματος.
- Επιστρέφει την απόσταση ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές, αλλά όχι κάποιο μονοπάτι που δίνει αυτήν την απόσταση.
- Έχει πολυπλοκότητα $O(n^3)$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Περιγραφή του αλγόριθμου

Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{1, \dots, n\}$.
Έξοδος: Ένας πίνακας A με $A_{i,j} = d(i, j)$.

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα $A^{(0)}$, όπου

$$A^{(0)}_{i,j} = \begin{cases} w(i,j), & \text{αν } i \neq j \text{ και } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{αν } i = j, \\ \infty, & \text{αν } i \neq j \text{ και } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

2. Για $k = 1, \dots, n$ κατασκεύασε τον πίνακα $A^{(k)}$ αναδρομικά σύμφωνα με τον κανόνα $A^{(k)}_{i,j} = \min(A^{(k-1)}_{i,j}, A^{(k-1)}_{i,k} + A^{(k-1)}_{k,j})$.
3. Επέστρεψε τον $A^{(n)}$.

Ορθότητα του αλγόριθμου

Θεώρημα

Αν το γράφημα G του αλγόριθμου Floyd-Warshall δεν έχει αρνητικά βάρη, τότε $A^{(n)}_{i,j} = d(i,j)$.

Αρκεί νδό για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ το $A^{(k)}_{i,j}$ ισούται με το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από το i στο j με ενδιάμεσες κορυφές από το σύνολο $\{1, \ldots, k\}$. Θα δείξουμε τον ισχυρισμό αυτό με επαγωγή στο k.

Για $k = 0$ ο ισχυρισμός είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = k - 1$ (ΕΥ).

Έστω ένα ελάχιστο μονοπάτι από την i στην j που χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές μόνο από το σύνολο $\{1, \ldots, k\}$.

Ορθότητα του αλγόριθμου

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

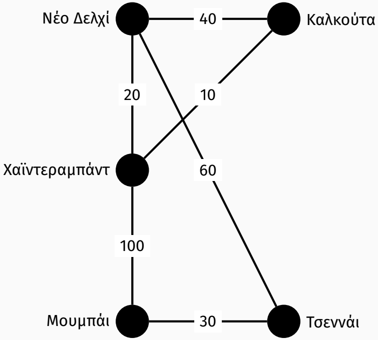
Αν το μονοπάτι δεν περνάει από την κορυφή k τότε (από την ΕΥ) το $A_{i,j}^{(k-1)}$ είναι το ελάχιστο μήκος και από τον αλγόριθμο θα έχουμε ότι $A_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k-1)}$.

Αν το μονοπάτι περνάει από την κορυφή k, τότε αυτό θα πρέπει να συμβαίνει ακριβώς μια φορά (αλλιώς δεν μπορεί να είναι ελάχιστο, δεδομένου ότι έχουμε μη-αρνητικά βάρη). Έτσι, μπορούμε να χωρίσουμε το μονοπάτι σε δύο σκέλη, το κομμάτι $i \to \cdots \to k$ και το κομμάτι $k \to \cdots \to j$. Τότε το μήκος του μονοπατιού θα είναι (από την ΕΥ) $A_{i,k}^{(k-1)} + A_{k,j}^{(k-1)}$.

Σε κάθε περίπτωση, $A_{i,j}^{(k)} = \min(A_{i,j}^{(k-1)}, A_{i,k}^{(k-1)} + A_{k,j}^{(k-1)})$.

Ένα παράδειγμα χρήσης του αλγορίθμου

Ας βρούμε με την βοήθεια του αλγόριθμου Floyd-Warshall το ελάχιστο κόστος για να κινηθεί κανείς από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη, αν οι απευθείας πτήσεις και τα αντίστοιχα κόστη δίνονται στο παρακάτω γράφημα:



Δείτε το βίντεο για την λύση!

Ο αλγοριθμος του Dijkstra

Λίγα λόγια για τον αλγόριθμο

- Ο αλγόριθμος αυτός δημοσιεύτηκε το Edsger Dijkstra το 1959.
- Ο αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με θετικά βάρη και δύο κορυφές του και επιστρέφει την απόστασή τους.
- Από τον αλγόριθμο αυτό μπορούμε να βρούμε και το μονοπάτι με το ελάχιστο βάρος.
- Έχει πολυπλοκότητα $O(n^2)$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Περιγραφή του αλγόριθμου

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα με θετικά βάρη $G = (V, E)$ και κορυφές $a, z \in V$.
Έξοδος: $d(a, z)$.

1. Γράφω $V = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ έτσι ώστε $u_0 = a$ και $u_n = z$.
2. Θέτω $L(u_0) = 0$ και $L(u_i) = \infty$ για $i \geq 0$.
3. Θέτω $S = \emptyset$.
4. Όσο $z \notin S$:
    - 4.1 Πάρε $u \in V \setminus S$ τέτοιο ώστε $L(u)$ ελάχιστο.
    - 4.2 $S \leftarrow S \cup \{u\}$.
    - 4.3 Για κάθε $w \in V \setminus S$, θέσε $L(w) = \min\{L(w), L(u) + w(u, w)\}$.
5. Επέστρεψε το $L(z)$.

Ορθότητα του αλγόριθμου

Θεώρημα

Το μονοπάτι που βρίσκει ο αλγόριθμος Dijkstra είναι ελάχιστου μήκους.

Αρκεί νδό στην k-στή επανάληψη του 4ου βήματος του αλγόριθμου η τιμή $L(u)$ δείχνει το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από την a στην u αν $u \in S$, ενώ αν $u \notin S$ τότε το $L(u)$ δείχνει το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από την a στην u, τέτοιο ώστε όλες οι ενδιάμεσες κορυφές να ανήκουν στο S.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο k. Ο ισχυρισμός είναι προφανής για $k = 0$. Έστω ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για k (ΕΥ).

Ορθότητα του αλγόριθμου

Θα υιοθετήσουμε τους συμβολισμούς $L_i(u)$ και S_i για να συμβολίσουμε την τιμή της $L(u)$ και το σύνολο S κατά την i-στή επανάληψη του 4ου βήματος του αλγορίθμου, όπου $u \in V$.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στην $(k+1)$-στή επανάληψη και έστω ότι σε αυτήν την επανάληψη προσθέτουμε την κορυφή v στο S (άρα $S_{k+1} = S_k \cup \{v\}$).

Το ζητούμενο έπεται άμεσα από την ΕΥ για όλα τα $u \in S_{k+1} \setminus \{v\}$ $(= S_k)$, άρα επικεντρωνόμαστε στο v και στα στοιχεία εκτός του S_{k+1}.

Για το v, αρκεί νδο το ελάχιστο μονοπάτι από την a στην v περνάει μόνο από κορυφές του S_k. Έστω όχι. Τότε παίρνουμε u την πρώτη κορυφή εκτός του S_k του ελάχιστου μονοπατιού.

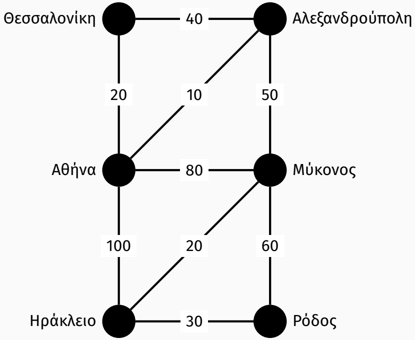
Ορθότητα του αλγόριθμου

Από την ΕΥ και από το γεγονός ότι τα βάρη είναι θετικά, παίρνουμε ότι $L_k(u) < L_k(v)$, άρα ο αλγόριθμος θα έπρεπε να προσθέσει την u πριν την v, άτοπο!

Αν $u \notin S_{k+1}$, τότε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την a στην u με ενδιάμεσες κορυφές από το S_{k+1} είτε θα περιέχει την v, είτε όχι. Αν όχι, τότε από την ΕΥ, το μήκος του μονοπατιού είναι $L_k(u)$. Αν ναι, τότε από την ΕΥ, μπορούμε να βρούμε ένα μονοπάτι με τις επιθυμητές ιδιότητες ελάχιστου μήκους, έτσι ώστε η τελευταία κορυφή, πριν την u, να είναι η v. Έτσι το μονοπάτι έχει μήκος $L_k(v) + w(u, v)$.

Ένα παράδειγμα χρήσης του αλγορίθμου

Ας βρούμε με την βοήθεια του αλγόριθμου Dijkstra το ελάχιστο κόστος για να κινηθεί κανείς από την Ρόδο στην Θεσσαλονίκη, αν οι απευθείας πτήσεις και τα αντίστοιχα κόστη δίνονται στο παρακάτω γράφημα:

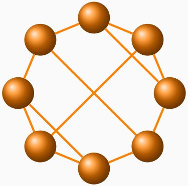


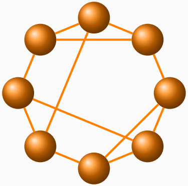
Δείτε το βίντεο για την λύση!

Bonus: Ένας ισομορφισμός από την 16η διάλεξη

Ένα παράδειγμα

Δείξτε ότι είναι ισόμορφα τα γραφήματα:





Δείτε το βίντεο για την λύση.