MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

16η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 20/11/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Διαμετρος Γραφηματος

Η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος

Πρόταση

Αν $G = (V, E)$ απλό συνεκτικό γράφημα n κορυφών, τότε $\operatorname{diam} G \leq n - 1$

Έστω $u, v \in V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $d(u, v) \leq n - 1$.

- Επειδή G συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι του G $u = e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_k \to e_{k+1} = v$. Έστω k το μήκος του.
- Αν $k \leq n - 1$, το ζητούμενο έπεται. Έστω λοιπόν ότι $k \geq n$. Αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποιο μονοπάτι από το u στο v μήκους $< k$.

Η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος

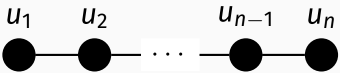
- Επειδή $\{e_1, \ldots, e_{k+1}\} \subseteq V$ και $|V| = n < k+1$, έχουμε ότι θα υπάρχουν κάποια $i < j$ τέτοια ώστε $e_i = e_j$.
- Έτσι το μονοπάτι $u = e_1 \to \cdots \to e_i \to e_{j+1} \to \cdots e_k \to e_{k+1} = v$ είναι μονοπάτι του G, από το u στο v μήκους $k - (j - i) < k$.
- Το ζητούμενο έπεται.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Περιγράψτε όλα τα γραφήματα n κορυφών διαμέτρου $n-1$.

Ένα τέτοιο γράφημα θα πρέπει να περιέχει ένα υπογράφημα της μορφής:



Ακόμα παρατηρούμε ότι αν περιέχει έστω και μια ακόμα επιπλέον ακμή, τότε για κάθε i, j θα είχαμε ότι $d(u_i, u_j) < n-1$. Άρα το γράφημα δεν περιέχει καμμία επιπλέον ακμή, δηλαδή είναι της παραπάνω μορφής.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα-Πρόταση

Αν σε ένα γράφημα υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού, τότε αυτές θα πρέπει να συνδέονται με μονοπάτι.

- Έστω όχι.
- Τότε θα ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.
- Μπορούμε να δούμε κάθε μια από αυτές τις συνιστώσες σαν ξεχωριστά γραφήματα, τα οποία όμως θα έχουν ακριβώς από μια κορυφή περιττού βαθμού.
- Άτοπο!

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα-Πρόταση

Αν $G = (V, E)$ συνεκτικό γράφημα n κορυφών και μέγιστου βαθμού d, τότε

$$n \leq 1 + d \cdot \frac{(d-1)^{\operatorname{diam} G} - 1}{d-2}.$$

Έστω $u \in V$. Θεωρούμε τα σύνολα $V(k) := \{v \in V \ : \ d(u,v) = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, \operatorname{diam} G$. Τα σύνολα αυτά διαμερίζουν το V. Επομένως,

$$n = |V| = \sum_{k=0}^{\operatorname{diam} G} |V(k)|.$$

Ακόμα, προφανώς $|V(0)| = 1$. Ισχυριζόμαστε ότι για $k \geq 1$ έχουμε ότι $|V(k)| \leq d(d-1)^{k-1}$.

Ένα παράδειγμα

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με επαγωγή:

- Για $k = 1$ (προφανώς) ισχύει. Έστω ότι ισχύει για m (ΕΥ).
- Για $m + 1$, έχουμε ότι κάθε μια από τις κορυφές του $V(m)$ έχει το πολύ d γείτονες. Τουλάχιστον ένας εξ' αυτών θα έχει απόσταση από το u ίση με $m - 1$, δηλαδή το πολύ $d - 1$ θα έχουν απόσταση $m + 1$. Ακόμα από την ΕΥ, το $V(m)$ έχει το πολύ $d(d-1)^{m-1}$ στοιχεία. Εφόσον κάθε στοιχείο του $V(m+1)$ πρέπει να προέρχεται από κάποιο στοιχείο του $V(m)$ και κάθε στοιχείο του $V(m)$ αντιστοιχεί το πολύ σε $d(d-1)^{m-1}$ στοιχεία του $V(m+1)$, καταλήγουνε ότι

$$|V(m+1)| \leq d(d-1)^{m-1}(d-1) = d(d-1)^m.$$

Ένα παράδειγμα

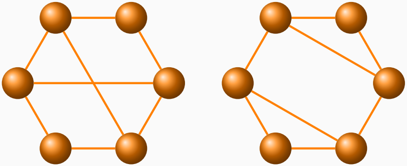
Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} n &= 1 + \sum_{k=1}^{\operatorname{diam} G} |V(k)| \\ &\leq 1 + d \left(\sum_{i=0}^{\operatorname{diam} G - 1} (d-1)^i \right) = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^{\operatorname{diam} G} - 1}{(d-1) - 1}. \end{aligned}$$

Μερικές ασκήσεις στην ισομορφία

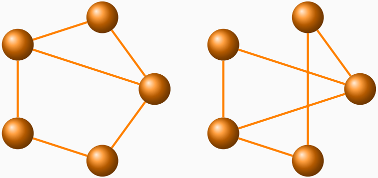
Ασκήσεις

- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;



Όχι, δείτε το βίντεο

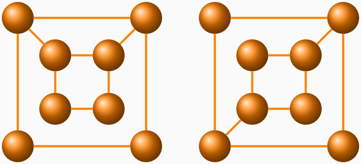
- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;



Ναι, δείτε το βίντεο

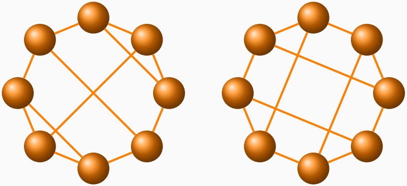
Ασκήσεις

- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;



Όχι, δείτε το βίντεο

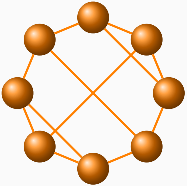
- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;

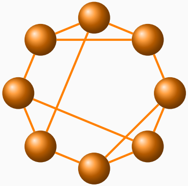


Όχι, δείτε το βίντεο

Ασκήσεις

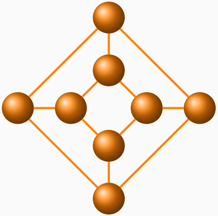
- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;

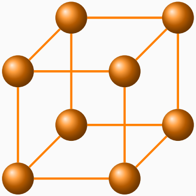




Ναι, μπορείτε να βρείτε έναν ισομορφισμό;

- Είναι ισόμορφα τα γραφήματα;





Ναι, μπορείτε να βρείτε έναν ισομορφισμό;

Άσκηση 12(iv) του Φυλλαδίου 2

Άσκηση

Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k$ με αρχικές συνθήκες $a_0 = 4$ και $a_1 = 12$.

Έστω $G(x)$ η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k = 4 + 12x + \sum_{k=2}^{\infty}(a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k)x^k \\ &= 4 + 12x + x\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} + 2x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} + 4x^2 \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2}x^{k-2} \\ &= 4 + 12x + x(-4 + G(x)) + 2x^2 G(x) + \frac{4x^2}{1-2x}. \end{aligned}$$

Άσκηση 12

Από το τελευταίο παίρνουμε ότι

$$(1-x-2x^2)G(x) = 4 + 8x + \frac{4x^2}{1-2x} = \frac{4(1-3x^2)}{1-2x}.$$

Από το τελευταίο (επειδή $(1-x-2x^2) = (1+x)(1-2x)$), βρίσκουμε την γεννήτρια συνάρτηση

$$G(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(1+x)(1-2x)^2} = \frac{4}{9}\left(-\frac{2}{1+x} + \frac{-19x+11}{(1-2x)^2}\right).$$

Επόμενος στόχος μας είναι να γράψουμε την γεννήτρια συνάρτηση με την βοήθεια αθροίσματος (ως δυναμοσειρά). Γνωρίζουμε ότι

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i.$
- $\frac{1}{1-2x} = \sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i \Rightarrow \left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i i x^{i-1}$
  $\Rightarrow \frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i (i+1) x^i.$

Άσκηση 12

Επομένως, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{4}{9}\left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(-1)^{i+1}x^i + (-19x+11)\sum_{i=0}^{\infty} 2^i(i+1)x^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{4}{9}\left(2(-1)^{i+1} + 11\cdot 2^i(i+1) - 19\cdot 2^{i-1}i\right)\right]x^i. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι $a_i = \frac{4}{9}\left(2(-1)^{i+1} + 11\cdot 2^i(i+1) - 19\cdot 2^{i-1}i\right)$.