MEM241 - Διακριτά Μαθηματικά

14η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 13/11/2020

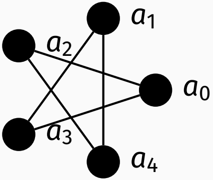
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κυκλωματα, Κυκλοι, Προσιτοτητα, Συνεκτικοτητα

Κύκλοι και κυκλώματα

Ένα μονοπάτι, του οποίου η πρώτη και η τελευταία κορυφή ταυτίζονται λέγεται κύκλωμα. Ένα κύκλωμα που δεν έχει καμμία επαναλαμβανόμενη ακμή λέγεται κύκλος.

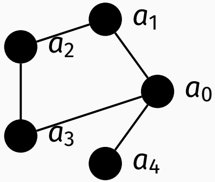
Για παράδειγμα, στο γράφημα:



το μονοπάτι $a0 \to a2 \to a4 \to a1 \to a3 \to a0$ είναι ταυτόχρονα κύκλωμα και κύκλος.

Κύκλοι και κυκλώματα

Στο γράφημα

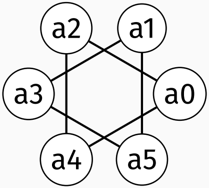


βλέπουμε ότι το μονοπάτι
$a4 \to a0 \to a1 \to a2 \to a3 \to a0 \to a4$ είναι κύκλωμα, αλλά όχι κύκλος. Αντίθετα το μονοπάτι $a0 \to a1 \to a2 \to a3 \to a0$ είναι κύκλος.

Ορισμός

Σε ένα γράφημα G η κορυφή u είναι προσιτή από την v αν υπάρχει μονοπάτι από την v στην u.

Στο γράφημα



η κορυφή $a0$ είναι προσιτή από την $a2$, αλλά όχι από την $a5$.

Προσιτότητα

Πρόταση

Η προσιτότητα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα. Τότε:

- Για κάθε $u \in V$, u προσιτό από το u, μέσω μονοπατού μήκους 0 (ανακλαστική).
- Αν $u, v \in V$ με u προσιτή από το v, τότε υπάρχει μονοπάτι $v \to \cdots \to u$. Θεωρώντας το ίδιο μονοπάτι, με αντίθετη κατεύθυνση, παίρνουμε ένα μονοπάτι $u \to \cdots \to v$, άρα v προσιτή από την u (συμμετρική).

Προσιτότητα

- Αν $u, v, w \in V$ με u προσιτή από την v και v προσιτή από την w, τότε υπάρχουν μονοπάτια $p_1 : v \to \cdots \to u$ και $p_2 : w \to \cdots \to v$. Παίρνουμε το μονοπάτι

$$p : \overbrace{w \to \cdots \to v}^{p_2} \underbrace{\!\!\!\! \to \cdots \to u}_{p_1}.$$

  Άρα η u είναι προσιτή από την w (μεταβατική).

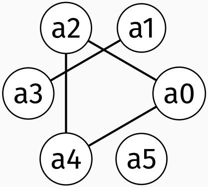
Συνεκτικές συνιστώσες

Ορισμός

Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει η σχέση της προσιτότητας ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες.

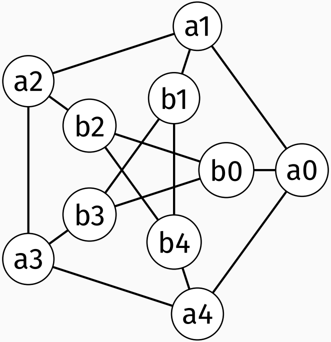
Ορισμός

Ένα γράφημα με μόνο μια συνεκτική συνιστώσα λέγεται συνεκτικό.



Για παράδειγμα το διπλανό γράφημα δεν είναι συνεκτικό καθώς έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες ($\{a0, a2, a4\}$, $\{a1, a3\}$ και $\{a5\}$).

Αντίθετα το γράφημα



είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα

Αν $G = (V, E)$ συνεκτικό απλό γράφημα, τέτοιο ώστε $1 \leq |E| < |V|$, τότε υπάρχει κορυφή βαθμού 1.

Επειδή G συνεκτικό, με τουλάχιστον μια ακμή, καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει κορυφή βαθμού 0 (γιατί θα ήταν από μόνη της συνεκτική συνιστώσα).

Υποθέτουμε ότι για κάθε $u \in V$, έχουμε ότι $\deg(u) \geq 2$. Από το θεώρημα των χειραψιών παίρνουμε:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 2 = |V|,$$

άτοπο. Επομένως υπάρχει κορυφή βαθμού < 2 και αφού όλες οι κορυφές έχουν βαθμό > 0, τότε αυτή η κορυφή θα έχει βαθμό 1.

Απόσταση κορυφών – Διάμετρος γραφήματος

Απόσταση κορυφών

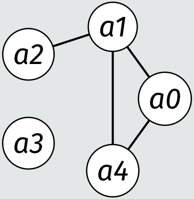
Έστω $G = (V, E)$ απλό γράφημα και $u, v \in V$. Η απόσταση των u, v ορίζεται ως

$$d(u,v) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν η } u \text{ δεν είναι προσιτή από την } v, \text{ αλλιώς,} \\ \text{το ελάχιστο μήκος μονοπατιού που συνδέει τις } u \text{ και } v. \end{cases}$$

Παράδειγμα

Στο διπλανό γράφημα έχουμε ότι

- $d(a2, a4) = 2$,
- $d(a0, a0) = 0$,
- $d(a0, a3) = +\infty$.



Θεώρημα (Τριγωνική ανισότητα)

Αν $G = (V, E)$ απλό γράφημα, τότε για κάθε $u, v, w \in V$, έχουμε ότι $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Αν το u δεν είναι προσιτό από το v, τότε τουλάχιστον ένα εκ των u, v δεν θα είναι προσιτά από το w. Επομένως και τα δύο μέρη της ανισότητας θα είναι ίσα με $+\infty$ και η ανισότητα ισχύει.

Αν το u είναι προσιτό από το v, αλλά το w δεν ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με αυτά, τότε το αριστερό μέρος της ανισότητας θα είναι πεπερασμένο και το δεξί $+\infty$, δηλαδή η ανισότητα ισχύει.

Η τριγωνική ανισότητα

Τώρα υποθέτουμε ότι τα u, v, w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Έστω μονοπάτι $p_1 : u \to \cdots \to w$ μήκους $d(u, w)$ και μονοπάτι $p_2 : w \to \cdots \to v$ μονοπάτι μήκους $d(w, v)$. Τότε το μονοπάτι

$$p : \overbrace{u \to \cdots \to w}^{p_1} \underbrace{\to \cdots \to v}_{p_2}$$

θα έχει μήκος $d(u, w) + d(w, v)$ και συνδέει τις κορυφές u, v.

Καταλήγουμε ότι

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v).$$

Η απόσταση ως μετρική

Από τα τελευταία παρατηρούμε ότι αν $G = (V, E)$ απλό γράφημα, τότε για κάθε $u, v, w \in V$,

1. $d(u, v) = 0 \iff u = v$,
2. $d(u, v) = d(v, u)$,
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Καταλήγουμε ότι η d είναι μετρική και έτσι ο (V, d) καθίσταται μετρικός χώρος.

Παρατήρηση

Δεν θα μας απασχολήσει στο συγκεκριμένο μάθημα αυτή η προσέγγιση (του γραφήματος ως μετρικού χώρου), αλλά είναι μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση!

Διάμετρος

Ορισμός

Η διάμετρος ενός απλού γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v).$$

Είναι ξεκάθαρο από τον ορισμό, ότι για ένα γράφημα G με πεπερασμένες το πλήθος κορυφές, έχουμε ότι G συνεκτικό αν και μόνο αν $\mathrm{diam}(G) < \infty$.