

# MEM241 - ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

13η Διαδικτυακή Διάλεξη

---

Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 12/11/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

## **ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

---

## Πρόταση

Δυο γραφήματα είναι ισόμορφα αν και μόνο αν τα συμπληρωματικά τους είναι ισόμορφα.

Έστω  $G_1 = (V_1, E_1)$  και  $G_2 = (V_2, E_2)$  δύο ισόμορφα γραφήματα και  $f: V_1 \rightarrow V_2$  ένας ισομορφισμός. Έστω  $G_1^C = (V_1, E_1^C)$  και  $G_2^C = (V_2, E_2^C)$  τα συμπληρώματα των  $G_1$  και  $G_2$  αντίστοιχα. Έχουμε ότι για κάθε  $u, v \in V_1$ ,

$$u \overset{G_1^C}{\sim} v \iff u \overset{G_1}{\not\sim} v \iff f(u) \overset{G_2}{\not\sim} f(v) \iff f(u) \overset{G_2^C}{\sim} f(v).$$

Καταλήγουμε ότι  $G_1^C$  και  $G_2^C$  ισόμορφα και μάλιστα έχουν τους ίδιους ισομορφισμούς.

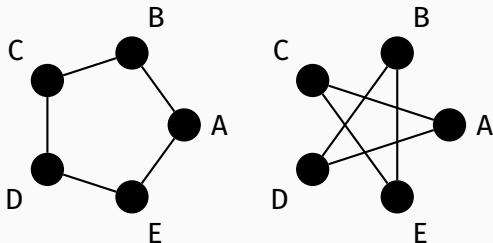
Το αντίστροφο προκύπτει από το ευθύ, καθώς για  $i = 1, 2$ ,  
 $(G_i^C)^C = G_i$ .

# Μερικά παραδείγματα

## Παράδειγμα

Βρείτε ένα γράφημα με 5 κορυφές που να είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του.

Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα



είναι συμπληρωματικά και ισόμορφα. Μάλιστα και τα δυο είναι το  $C_5$ .

### Παράδειγμα

*Βρείτε ένα γράφημα με 6 κορυφές που να είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του.*

Έστω  $G = (V, E)$  ένα τέτοιο γράφημα και  $G^c = (V, E^c)$  το συμπληρωματικό του. Επειδή τα  $G$  και  $G^c$  είναι ισόμορφα, θα έχουν το ίδιο πλήθος ακμών. Μάλιστα επειδή οι ακμές τους είναι διαφορετικές ανά δύο και η ένωσή τους μας δίνει όλες τις δυνατές ακμές (δηλαδή τις ακμές του  $K_6$ ), θα έχουμε ότι  $|E| + |E^c| = \binom{6}{2}$  και  $|E| = |E^c|$ , δηλαδή  $|E| = \binom{6}{2}/2$ .

Όμως  $\binom{6}{2}/2 = 15/2 \notin \mathbf{Z}$ . Καταλήξαμε σε άτοπο, δηλαδή δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

### Παράδειγμα

*Βρείτε ένα γράφημα με 4 κορυφές που να είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του.*

**Δείτε το βίντεο για την λύση!**

# Μερικά παραδείγματα

## Παράδειγμα

*Βρείτε όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα με 4 κορυφές.*

Δείτε το βίντεο για την λύση!

# ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ

---



Αν  $G = (V, E)$  γράφημα, ένα **μονοπάτι** στο  $G$ , θα λέγεται μια ακολουθία κορυφών

$$u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_n,$$

τέτοια ώστε  $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ . Το πλήθος των ακμών (δηλαδή το  $n - 1$ ) λέγεται **μήκος** του μονοπατιού.

# Μονοπάτια και Ισομορφισμός

## Πρόταση

Αν  $f: V \rightarrow V'$  ισομορφισμός των γραφημάτων  $G = (V, E)$  και  $G' = (V', E')$ , τότε αν οι κορυφές  $u, v \in V$  συνδέονται με μονοπάτι μήκους  $n$  αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει και με τις κορυφές  $f(u), f(v) \in V'$ .

Αρκεί να δείξουμε την ευθεία κατεύθυνση. Έστω

$$u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_n = v$$

το μονοπάτι του  $G$ . Τότε, επειδή,  $f$  ισομορφισμός, το

$$f(u) = f(u_0) \rightarrow f(u_1) \rightarrow \cdots \rightarrow f(u_n) = f(v)$$

θα είναι ένα μονοπάτι του  $G'$ .

- Η πρόταση αυτή μας δίνει ένα ακόμα εργαλείο για να δείχνουμε την μη ισομορφία γραφημάτων.
- Αν σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές του συνδέονται με μονοπάτια, το ίδιο συμβαίνει και με ένα ισόμορφό του.

# Μερικά παραδείγματα

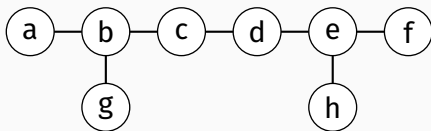
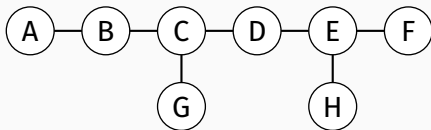
## Παράδειγμα

*Βρείτε όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα 6 κορυφών που είναι 2-κανονικά.*

Δείτε το βίντεο για την λύση!

## Μερικά παραδείγματα

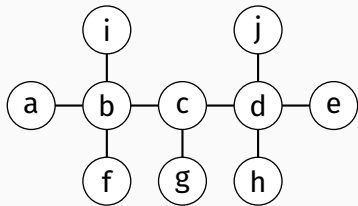
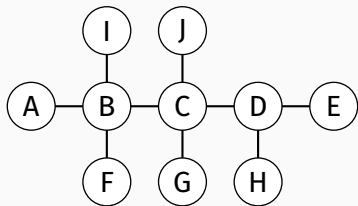
Είναι τα παρακάτω γραφήματα ισόμορφα;



Δείτε το βίντεο για την λύση!

## Μερικά παραδείγματα

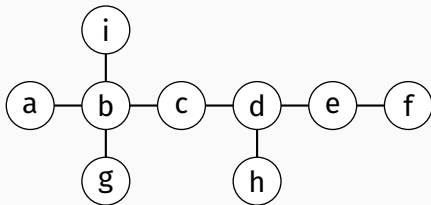
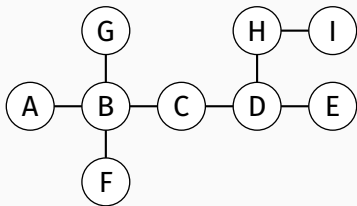
Είναι τα παρακάτω γραφήματα ισόμορφα;



Δείτε το βίντεο για την λύση!

## Μερικά παραδείγματα

Είναι τα παρακάτω γραφήματα ισόμορφα;



Δείτε το βίντεο για την λύση!

## Μερικά παραδείγματα

Πόσα μη ισόμορφα απλά γραφήματα με 5 κορυφές και 3 ακμές υπάρχουν;

Δείτε το βίντεο για την λύση!



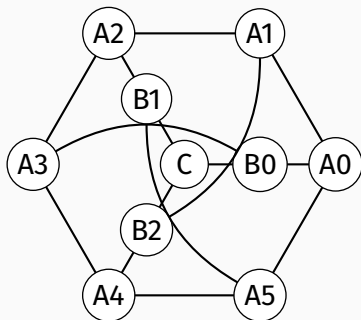
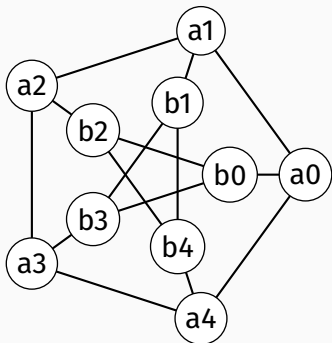
## Μερικά παραδείγματα

Είναι όλα τα 2-κανονικά γραφήματα με 6 κορυφές ισόμορφα;

Δείτε το βίντεο για την λύση!

## Μερικά παραδείγματα

Είναι τα παρακάτω γραφήματα ισόμορφα;



Δείτε το βίντεο για την λύση!