ΜΕΜ241 - Διακριτά Μαθηματικά

12η Διαδικτυακή Διάλεξη

Γιώργος Καπετανάκης

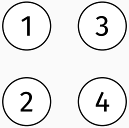
Χειμερινό εξάμηνο 2020-21 - 06/11/2020

Πανεπιστήμιο Κρήτης

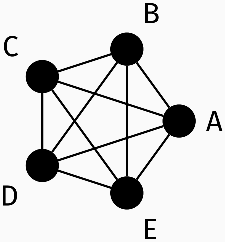
Μερικά Ειδικά Γραφήματα

Μερικά ειδικά γραφήματα

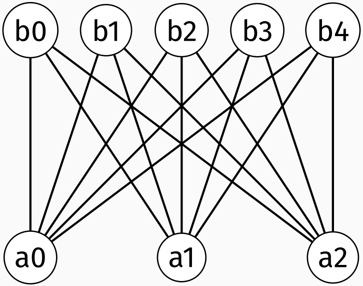
Το κενό γράφημα, αποτελείται από n κορυφές και καμμία ακμή. Συμβολίζεται με E_n. Π.χ. το E_4 είναι το εξής:



Το πλήρες γράφημα αποτελείται από n κορυφές και έχει όλες τις δυνατές ακμές. Έχει $\binom{n}{2}$ ακμές και κάθε κορυφή του έχει βαθμό $n-1$. Συμβολίζεται με K_n. Π.χ. το K_5 είναι το εξής

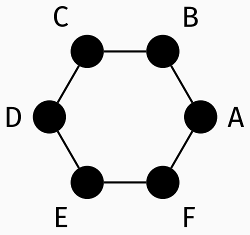


Το πλήρες διμερές έχει ως κορυφές το σύνολο $V = A \cup B$, όπου A και B ξένα σύνολα τάξης m και n αντίστοιχα. Οι ακμές του είναι το σύνολο $E = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B\}$. Συμβολίζεται με $K_{m,n}$ και έχει mn ακμές, $m + n$ κορυφές εκ των οποίων οι m έχουν βαθμό n και οι n έχουν βαθμό m. Στο σχήμα απεικονίζεται το $K_{3,5}$.



Μερικά ειδικά γραφήματα

Ο κύκλος με $n \geq 3$ κορυφές είναι το γράφημα $C_n = ([n], E)$, όπου $E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{n, 1\}\}$ ή εναλλακτικά $i \sim j \iff |i - j| = 1$ ή $n - 1$. Πρόκειται για ένα 2-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Στο σχήμα απεικονίζεται το C_6.

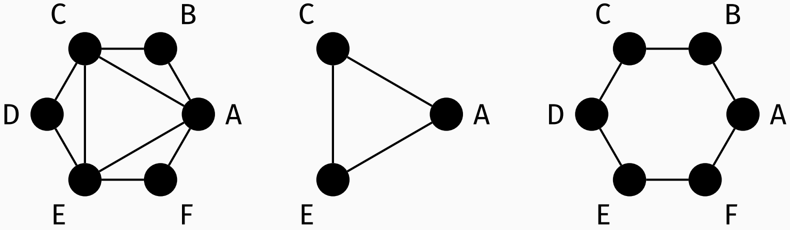


Υπογραφηματα

Ορισμός

Το $G' = (V', E')$ είναι υπογράφημα του $G = (V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Το G' είναι το επαγόμενο υπογράφημα του G, αν $E' = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V'\}$.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τα παρακάτω γραφήματα:



Αν τα ονομάσουμε G_1, G_2 και G_3 αντίστοιχα, εύκολα βλέπουμε ότι G_2, G_3 υπογραφήματα του G_1. Το G_2 είναι επαγόμενο, ενώ το G_3 όχι.

Μια συνδυαστική ερώτηση

Παράδειγμα

Πόσα υπογραφήματα και πόσα επαγόμενα υπογραφήματα έχει το K_n;

Ξεκινάμε με τα υπογραφήματα. Για κάθε $k = 0, \ldots, n$, έχουμε $\binom{n}{k}$ τρόπους για να επιλέξουμε ένα υποσύνολο κορυφών μεγέθους k. Ανάμεσα σε αυτές τις κορυφές υπάρχουν $\binom{k}{2}$ ακμές του K_n και εμείς μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε υποσύνολό τους θέλουμε. Έχουμε δηλαδή $2^{\binom{k}{2}}$ τρόπους. Συνολικά θα έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}}$$

υπογραφήματα.

Μια συνδυαστική ερώτηση

Όσον αφορά στα επαγόμενα υπογραφήματα, ένα επαγόμενο υπογράφημα καθορίζεται πλήρως από την επιλογή των κορυφών του. Επομένως έχουμε τόσα επαγόμενα υπογραφήματα, όσα είναι τα υποσύνολα του συνόλου των κορυφών, δηλαδή 2^n.

Ισομορφα Γραφηματα

Δύο γραφήματα λέγονται ισόμορφα αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις κορυφές τους με κάποιον 1-1 και επί τρόπο, έτσι ώστε να διατηρηθεί η συνδεσμολογία. Με άλλα λόγια $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$, ισόμορφα αν υπάρχει κάποια $f : V \to V'$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε για κάθε $u, v \in V$,

$$u \sim v \iff f(u) \sim f(v).$$

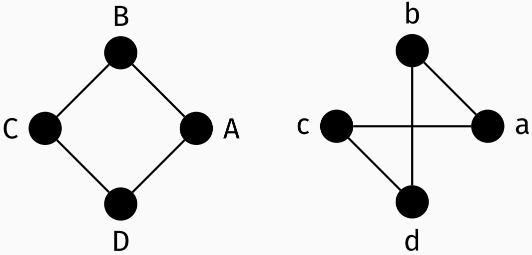
Η απεικόνιση f ονομάζεται ισομορφισμός.

Παρατήρηση

Ισχύει ότι $|V| = |V'|$.

Παράδειγμα

Τα γραφήματα



είναι ισόμορφα μέσω της απεικόνισης
$f : A \mapsto a, B \mapsto b, C \mapsto d, D \mapsto c$.

Παρατήρηση

Παρατηρήστε ότι η απεικόνιση $g : A \mapsto b, B \mapsto a, C \mapsto c, D \mapsto d$ είναι επίσης ισομορφισμός, επομένως ενδέχεται να υπάρχουν πολλοί ισομορφισμοί.

Μερικές ιδιότητες

Πρόταση

Η ισομορφία γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θα δούμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.

Ανακλαστική Έστω $G = (V, E)$ απλό γράφημα. Παρατηρώ ότι η ταυτοτική απεικόνιση $V \to V$ είναι ισομορφισμός, άρα G ισόμορφο με τον εαυτό του.

Συμμετρική Έστω $G = (V, E)$ ισόμορφο με το $G' = (V', E')$ και $f : V \to V'$ ένας ισομορφισμός. Είναι εύκολο να δούμε ότι $f^{-1} : V' \to V$ ισομορφισμός, επομένως G' ισόμορφο με G.

Μερικές ιδιότητες

Μεταβατική Έστω $G = (V, E)$ ισόμορφο με το $G' = (V', E')$ και $G' = (V', E')$ ισόμορφο με το $G'' = (V'', E'')$. Αρκεί να δείξουμε ότι $G = (V, E)$ ισόμορφο με το $G'' = (V'', E'')$. Αν $f : V \to V'$ ισομορφισμός και $f' : V' \to V''$ ισομορφισμός, τότε ισχυριζόμαστε ότι

$$f' \circ f : V \to V''$$

ισομορφισμός. Πράγματι, για κάθε $u, v \in V$:

$$\begin{aligned} u \sim v \iff f(u) \sim f(v) \iff f'(f(u)) \sim f'(f(v)) \\ \iff (f' \circ f)(u) \sim (f' \circ f)(v). \end{aligned}$$

Μερικές ιδιότητες

Πρόταση

Αν $f : V \to V'$ ισομορφισμός, τότε για κάθε $u \in V$ ισχύει ότι $\deg(u) = \deg(f(u))$.

Έστω $u \in V$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\deg(u) &= |N(u)| = |\{v \in V \mid u \sim v\}| \overset{f\text{ ισομ.}}{=} |\{v \in V \mid f(u) \sim f(v)\}| \\ &\overset{f\ 1-1}{=} |\{f(v) \in V' \mid f(u) \sim f(v)\}| \overset{f\text{ επί}}{=} |\{v' \in V' \mid f(u) \sim v'\}| \\ &= |N(f(u))| = \deg(f(u)).\end{aligned}$$

Μερικές ιδιότητες

Πόρισμα

Αν $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ ισόμορφα, τότε $|E| = |E'|$.

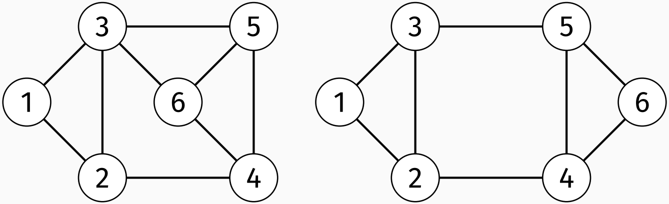
Έστω f ένας ισομορφισμός. Από το Θεώρημα των Χειραψιών έχουμε

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{u \in V} \deg(u) = \frac{1}{2}\sum_{u \in V} \deg(f(u))$$

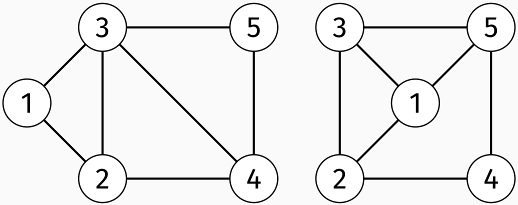
$$\overset{f \text{ 1-1 και επί}}{=} \frac{1}{2}\sum_{u' \in V'} \deg(u') = |E'|.$$

Μερικά παραδείγματα

Δείξτε ότι τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων δεν είναι ισόμορφα



και



Μοντελοποιηση Προβληματων

Μερικά παραδείγματα

Παράδειγμα

Μπορεί σε μια ομάδα 15 ατόμων κάθε άτομο να συνδέεται φιλικά με ακριβώς τρία άτομα; Το ίδιο για μια ομάδα 4 ατόμων.

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα όπου το κάθε άτομο της ομάδας είναι μια κορυφή και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν τα αντίστοιχα άτομα συνδέονται φιλικά.

Στο πρώτο ερώτημα θα έχουμε ένα απλό γράφημα όπου θα έχουμε περιττό πλήθος κορυφών περιττού βαθμού, αδύνατο.

Στο δεύτερο, παρατηρούμε ότι πρόκειται για το πλήρες γράφημα K_4.

Ένα πρόβλημα

Έχουμε ένα ποτάμι και στην μια όχθη έχουμε 2 Κανίβαλους και 2 Χορτοφάγους και μια βάρκα που χωράει 2 άτομα. Αν κάποια στιγμή οι κανίβαλοι υπερτερήσουν αριθμητικά έναντι των χορτοφάγων σε κάποια όχθη, τους τρώνε. Μπορούν να περάσουν απέναντι όλοι με ασφάλεια;

Δείτε το βίντεο για την απάντηση!