1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (Γ. Κωστάκης)

Μιγαδική Ανάλυση (Μεταπτυχιακό) 2020-2021

1. Έστω U και V ανοιχτά (μη-κενά) υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις (με την πραγματική έννοια, δηλαδή ως συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών x, y) και $h = g \circ f$ τότε
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$$
και
$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$$
Θυμίζουμε τον ορισμό των δύο διαφορικών τελεστών:
$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Αυτή η άσκηση αποτελεί τη **μιγαδική** εκδοχή του **κανόνα της αλυσίδας**.

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$, $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις $Cauchy - Riemann$ στο 0, αλλά δεν έχει μιγαδική παράγωγο στο 0.

3. Έστω Ω ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ (εννοείται μη-κενό) και $f \in H(\Omega)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

   (i) Ref σταθερή στο Ω.

   (ii) Imf σταθερή στο Ω.

   (iii) $|f|$ σταθερή στο Ω.

4. Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες μιγαδικών αριθμών και $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^\infty b_n$ με τη σύμβαση $B_0 = 0$. Αποδείξτε τον τύπο της **άθροισης κατά μέρη ή άθροιση κατά** $Abel$:
$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1} - a_n)B_n.$$

5. Αποδείξτε τα ακόλουθα.

(i) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο της μοναδιαίας περιφέρειας $\{|z| = 1\}$.

(ii) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάθε σημείο της μοναδιαίας περιφέρειας $\{|z| = 1\}$.

(iii) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει σε κάθε σημείο της μοναδιαίας περιφέρειας $\{|z| = 1\}$ εκτός από το σημείο $z = 1$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την άσκηση 4 «άθροιση κατά μέρη»).

6. Για $m \in \mathbb{N}$ αναπτύξτε την $(1-z)^{-m}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0. Αν $(1-z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δείξτε την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά των συντελεστών:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a_n / \left(\frac{1}{(m-1))!} n^{m-1} \right) \right) = 1.$$